

分类号：
学 号：20182118006

密 级：公开
单位代码：10759

石河子大学

硕士学位论文



初中数学教学中数学思想渗透 现状调查和策略研究

学 位 申 请 人	郭志宏
指 导 教 师	谢红梅 教授
申 请 学 位 类 别	专业硕士
专 业 名 称	教育
研 究 领 域	学科教学（数学）
所 在 学 院	理学院

中国·新疆·石河子

2022 年 6 月

分类号：
学 号：20182118006

密 级：公开
单位代码：10759

石河子大学

硕 士 学 位 论 文



初中数学教学中数学思想渗透 现状调查和策略研究

学 位 申 请 人	郭志宏
指 导 教 师	谢红梅 教授
申 请 学 位 类 别	专业硕士
专 业 名 称	教育
研 究 领 域	学科教学（数学）
所 在 学 院	理学院

中国·新疆·石河子

2022 年 6 月

**Research on the Current Situation and Strategies of Infiltrating
Mathematical Ideas in Teaching Mathematics in Junior Secondary
Schools**

A Dissertation Submitted to

Shihezi University

In Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Education

By

Guo Zhi-hong

(Education)

Dissertation Supervisor: Prof. Xie Hong-mei

June, 2022

石河子大学学位论文独创性声明及使用授权声明

学位论文独创性声明

本人所提交的学位论文是在我导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含其他个人已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中作了明确的说明并表示谢意。

研究生签名：郭志宏

时间：2022年5月30日

使用授权声明

本人完全了解石河子大学有关保留、使用学位论文的规定，学校有权保留学位论文并向国家主管部门或指定机构送交论文的电子版和纸质版。有权将学位论文在学校图书馆保存并允许被查阅。有权自行或许可他人将学位论文编入有关数据库提供检索服务。有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

研究生签名：郭志宏

时间：2022年5月30日

导师签名：谢红梅

时间：2022年5月30日

摘要

数学思想作为数学之魂，对于在数学学科中落实立德树人根本任务，培养新时代社会主义的建设者和接班人有着重要作用。然而，数学思想在当前教学中仍得不到重视：教师单纯灌输课本知识而不曾让学生感悟数学思想，一味强调教学结果而不重视知识探索过程，教会学生解题技巧而不重视对学生用数学思想分析、解决问题能力的培养。因此，本文对实习学校数学思想渗透现状调查和教学策略进行研究，以为一线教师提供一定的教学参考，从而有效改善数学思想渗透现状。

本研究以文献研究法为起点，采用问卷调查法、访谈法、案例分析法等多种研究方法对初中数学思想渗透现状和教学策略展开研究。通过文献调研，梳理数学思想渗透的研究现状；通过学生问卷、教师访谈得出数学思想渗透“学”与“教”的现状，结合实习见闻总结出思想渗透存在的问题；根据全国优课案例分析结果和前期调查发现的问题，以《课标（2011年版）》为指导，以知识发展为线索，有针对性地给出在教学中渗透数学思想的策略。

研究表明，初中数学思想渗透存在如下问题：一是师生对数学思想的认知有所偏差，将属于方法论范畴的数学思想当做事实性知识来记忆、背诵；二是师生缺乏科学合理的教与学的方法，教师用显化语言点明数学思想定义，学生背诵、记忆；三是教师课标研读不透彻，教师思想渗透缺少行动指南；四是教师缺少数学思想的相关教学研究，导致在思想渗透过程中存在诸多困惑；五是教师渗透数学思想缺少明确的目标层次，缺乏系统成熟的渗透策略。

针对上述发现的问题，结合全国优课案例的分析结果，本研究提出如下渗透策略：一是在课前知识的准备中准确把握数学思想，教师要认真研读课标中相关要求，深挖教材中思想蕴含情况，研究探讨思想渗透策略，明确思想渗透的程度，将数学思想与教学设计深度融合；二是在课堂知识的探索中巧妙渗透数学思想，教师要在概念引入、知识探索、问题解决、总结反思各环节中引导学生感悟、应用、升华数学思想；三是在课后知识教学的改进中体悟数学思想，教师要改变传统重知识轻思想的教学观念，通过信息技术等手段让思想渗透更具趣味性、高效性，通过多元的评价机制不断激励学生循序渐进地掌握数学思想。

随着数学课程改革的不断深入，教师要充分发挥数学学科的育人价值，将数学思想潜移默化地渗透到教学活动中，让学生在知识探索过程中不断感悟数学思想，进而培养学生的数学核心素养，落实立德树人的根本任务。

关键词：数学思想；现状调查；教学策略；初中数学

Abstract

Mathematical thinking, as the soul of mathematics, plays an important role in the implementation of the fundamental task of establishing moral education in mathematics, and in training the builders and successors of socialism in the new era. However, mathematical thinking is still not given much attention in current teaching: teachers simply instil textbook knowledge without ever allowing students to perceive mathematical ideas, emphasise teaching results without paying attention to the process of knowledge exploration, and teach students problem-solving skills without paying attention to the cultivation of students' ability to analyse and solve problems with mathematical ideas. Therefore, this article investigates the current situation of mathematical ideas penetration and teaching strategies in practicum schools, to provide some teaching references for frontline teachers, to effectively improve the current situation of mathematical ideas penetration.

This study takes the literature research method as the starting point and uses various research methods such as questionnaire survey method, interview method and case study method to investigate the current situation and teaching strategies of the infiltration of mathematical ideas in junior secondary schools. Through literature research, the current status of research on the infiltration of mathematical ideas is sorted out; through student questionnaires and teacher interviews, the current situation of "learning" and "teaching" of the infiltration of mathematical ideas is found, and the problems of the infiltration of ideas are summarised in the context of the internship; based on the results of the analysis of the national case study of excellent lessons Based on the results of the analysis of the national best lesson cases and the problems found in the preliminary survey, the 2011 edition of the Curriculum is used as a guide, and the development of knowledge is used as a clue to give targeted strategies for the penetration of mathematical ideas in teaching.

The study shows that the following problems exist in the infiltration of mathematical ideas in junior secondary schools: firstly, teachers and students have a biased perception of mathematical ideas, and treat mathematical ideas belonging to the category of methodology as factual knowledge to be memorised and recited; secondly, teachers and students lack a scientific and rational approach to teaching and learning, with teachers using explicit language to point out the definition of mathematical ideas and students reciting and memorising them; thirdly, teachers do not study the standards thoroughly, and teachers lack action

guidelines for the infiltration of ideas; fourthly, teachers lacked research on the teaching of mathematical ideas, which led to many confusions in the process of ideas penetration; fifthly, teachers lacked clear target levels for the penetration of mathematical ideas and lacked systematic and mature penetration strategies.

Because of the problems identified above, combined with the results of the analysis of the national best lesson cases, this study proposes the following infiltration strategies: Firstly, to accurately grasp mathematical ideas in the preparation of pre-class knowledge, teachers should carefully study the relevant requirements in the curriculum, dig deeper into the ideas embedded in the teaching materials, study and explore the strategies for the infiltration of ideas, clarify the extent of the infiltration of ideas, and deeply integrate mathematical ideas with the teaching design; secondly, in the exploration of classroom knowledge Teachers should guide students to perceive, apply and sublimate mathematical ideas in the introduction of concepts, knowledge exploration, problem-solving and summing up and reflecting; thirdly, to understand mathematical ideas in the improvement of knowledge teaching after lessons. Students are encouraged to grasp mathematical ideas progressively.

As the reform of the mathematics curriculum progresses, teachers should give full play to the nurturing value of the subject of mathematics, and subtle infiltration of mathematical ideas into teaching activities, so that students can continue to understand mathematical ideas in the process of knowledge exploration, and then cultivate students' core literacy in mathematics, and implement the fundamental task of building moral character.

Key words: mathematical thinking; investigation of the current situation; teaching strategies; junior high school mathematics

目 录

摘 要.....	I
Abstract.....	II
目 录.....	IV
第 1 章 绪论.....	1
1.1 研究背景与研究意义.....	1
1.1.1 研究背景.....	1
1.1.2 研究意义.....	2
1.2 概念界定与理论基础.....	3
1.2.1 概念界定.....	3
1.2.2 理论基础.....	5
1.3 文献综述.....	6
1.3.1 数学思想的国外研究.....	6
1.3.2 数学思想的国内研究.....	7
1.3.3 初中数学思想渗透的研究.....	8
1.3.4 研究述评.....	10
1.4 研究目的与研究内容.....	11
1.4.1 研究目的.....	11
1.4.2 研究内容.....	12
1.5 研究思路与方法.....	12
1.5.1 研究的整体思路.....	12
1.5.2 研究方法.....	13
1.6 研究的重难点与创新之处.....	14
第 2 章 初中数学教学中渗透数学思想的现状调查.....	15
2.1 学生问卷调查.....	15
2.1.1 调查问卷的设计.....	15
2.1.2 调查问卷的实施及处理.....	16
2.1.3 调查问卷的结果分析.....	16
2.1.4 学生调查问卷分析总结.....	21
2.2 教师访谈调查.....	22
2.3 初中数学教学中渗透数学思想的现状.....	24
2.4 初中数学教学中渗透数学思想存在的问题.....	26

第3章 初中数学教学中渗透数学思想的案例研究	28
3.1 案例1——正比例函数的教学案例分析	28
3.1.1 明确目标, 思想渗透落到实处	28
3.1.2 以生为本, 教师引导启发思想	29
3.1.3 注重过程, 探索新知感悟思想	29
3.1.4 整体把握, 循序渐进显化思想	30
3.2 案例2——算术平方根的教学案例分析	30
3.2.1 注重过程, 启发引导重感悟	31
3.2.2 激发兴趣, 信息技术助探索	32
3.2.3 梳理教材, 合理重组促认知	32
第4章 初中数学教学中渗透数学思想的策略研究	34
4.1 课前准备——在知识的准备中把握数学思想	34
4.1.1 研读课标, 定位思想渗透要求	34
4.1.2 研究教材, 深挖思想蕴含情况	34
4.1.3 教研活动, 探讨思想渗透策略	41
4.1.4 制定目标, 明确思想渗透程度	41
4.1.5 精心设计, 融入思想渗透环节	42
4.2 课堂教学——在知识形成、发展、应用中渗透数学思想	42
4.2.1 在概念引入中感悟数学思想	43
4.2.2 在知识探索中渗透数学思想	43
4.2.3 在问题解决中应用数学思想	44
4.2.4 在总结反思中升华数学思想	44
4.3 课后反思——在知识教学的改进中体悟数学思想	44
4.3.1 改变观念, 数学思想促成长	44
4.3.2 技术融合, 多方途径助探索	45
4.3.3 不断激励, 多元评价促完善	45
第5章 研究结论与展望	47
5.1 研究结论	47
5.2 研究不足与展望	47
5.2.1 研究不足	47
5.2.2 研究展望	48
参考文献	49
附录A 初中数学思想调查问卷(学生问卷)	52

附录 B 初中数学思想访谈提纲（教师访谈）	54
附录 C 《正比例函数》的教学案例	55
附录 D 《算术平方根》的教学案例	63
致 谢	71
作 者 简 介	72

第1章 绪论

1.1 研究背景与研究意义

1.1.1 研究背景

人才是实现民族振兴和国际竞争主动的战略资源，数学作为一门基础学科，堪称思维的体操，对人才的培养具有十分重要的意义。而数学思想是数学之魂，也是对数学掌握最高境界的标准，是唯一可以从书本转化入大脑中的“养分”，是人的精神品格的重要组成部分^[1]。因此，将数学思想融合在课堂教学中，对培养学生的思维方式，领悟数学学习的精髓，落实立德树人根本任务具有重要意义。

《义务教育数学课程标准（2011年版）》（以下简称《课标（2011年版）》）中指出数学教育既要让学生掌握学习生活中所必须的数学知识与技能，更要注重培养人的思维和创新的能力。《课标（2011年版）》在“基础知识”、“基本技能”的基础上，新增了“基本思想”、“基本活动经验”^[2]。《课标（2011年版）》对于数学思想有了明确的要求，教师应在传授书本知识的同时，注重对数学思想方法的总结提炼。在此背景下，2013年教育部审定通过的人教版初中数学教材为了对数学基本思想进行不同程度的渗透，对新教材进行了调整：为更好体现“四基”目标，减少了部分技巧性、运算难度较高的内容，同时修订每一章节的小结部分，使其更具“思想性”，增加对内容的提炼和概括，在问题思考部分，设计的问题更加侧重思考，突出学生对核心内容及相应思想方法的理解和掌握。

尽管课程标准对数学思想作了明确要求，数学思想在培养学生思维能力和创新能力方面举足轻重，但把课程标准对数学思想的要求落实到一线教学依然存在一定问题。实习期间，我通过课堂观察、与师生交流等方式了解所在学校的数学教学现状。我发现在初中数学教学中，大部分教师的关注点还是在基础知识和基本能力的培养上，而忽视了对基本思想的渗透。教师们认为学生只要掌握基础知识和相应的解题技巧就可以学好数学，数学思想更加抽象概括，也给学生涉及过一些数学思想，但发现对学生的解题帮助不大，所以不必在数学思想上花费太多时间。多数学生在解决问题中不会用到数学思想，对于数学思想的了解也不是太多，习惯通过记忆老师所讲的解题技巧来解决问题。数学思想真的在数学教学中无足轻重吗？教育部义务教育数学课程标准研制组组长史宁中教授在对课标修订的思考中提到“思想的感悟和经验的积累很大程度上会对一个人的思

维方法产生影响。思维方法的形成，需要对学科思想方法的感悟，需要积累学科思维活动的经验。^[3]由此可见，数学思想不仅关乎学生数学学习，更对人才培养至关重要。基于以上认识，本文拟定探讨“初中数学教学中数学思想渗透现状调查和策略研究”这一论题，通过调查问卷和访谈等形式对初中数学教学中渗透数学思想的现状展开调研，并结合文献调研和案例研究，给出在初中数学教学中渗透数学思想的若干可行性策略。

1.1.2 研究意义

1.1.2.1 助力教师明晰思想渗透途径，改进教学方法

新课改的背景下，从课标到教材都在发生变化，教师应改变教学方式，以满足课标中的新要求。但《课标（2011年版）》中对感悟数学思想只进行了概述性的教学建议，一线教师对于渗透数学思想的具体实施途径也不是很了解。导致一线教师在教学中渗透数学思想不够重视，即使足够重视也不知具体该如何实施，故一线教师对在教学中渗透数学思想还存在许多困惑，例如：为什么要将数学思想写入课标，什么时候渗透数学思想，如何在教学中渗透数学思想？本研究旨在通过调查问卷、访谈等方法调查初中数学教学中渗透数学思想的现状，总结出在教学中渗透数学思想存在的问题，结合案例分析，为在初中数学教学中渗透数学思想提供新视角，为一线教师提供渗透数学思想的策略与方法。

1.1.2.2 助力教师深刻理解数学思想，提升专业素养

本研究有助于教师更加深刻地理解数学思想的内涵及作用，提升自身专业素养。史宁中教授指出教师要提升自身的专业素养，除了要具备扎实的数学专业基础外，还要对学科知识有全面的认知，特别是学科体系中的数学核心思想，明白知识的前因后果，认识到数学知识的重要价值^[4]。教师只有知识储备足够丰富，对教学方式把握得当，这样才能在教学中有的放矢，不然只能停留在知识表面而不能有效渗透数学思想，本研究有助于一线教师理解数学思想的深刻内涵和重要价值，认识到渗透数学思想的必要性，从而使教师专业素养得到进一步提升。

1.1.2.3 助力学生快速转变思维方式，适应知识跨度

数学思想蕴含在整个数学知识体系中，是数学学科的精髓所在，对数学思想教学的研究有助于中小学数学教学的有效衔接。初中数学内容与小学数学间存在一定的区别与跨度，初中数学更强调抽象性，而刚升入初中的学生还是以形象思维为主，教学内容的跨度和思维过渡的不连贯导致了学生学习上出现了脱节。数学思想连接起了数学知识的

学习与应用，是学生学习数学的关键。所以为了帮助学生快速适应小升初的知识跨度，教师应将数学思想融合到课堂教学中，给学生创设知识探索的环境，启发学生感悟数学思想，提高学生用数学思想发现、分析、解决问题的能力。通过本研究，提出在初中数学教学中渗透数学思想的策略，有助于教师做好中小学数学教学的有效衔接，帮助学生快速实现思维上的转变，适应升入初中后数学知识的跨度。

1.2 概念界定与理论基础

1.2.1 概念界定

1.2.1.1 数学基本思想

数学基本思想作为“四基”之一，顾名思义，数学基本思想是数学思想的上位概念，数学基本思想是数学思想中具有奠基性、总结性和最广泛的思想，它们集传统数学思想和现代数学思想于一身，随着时代的发展不断完善^[5]。史宁中教授指出数学基本思想应当是具有一般性、代表性的思想。基本思想既应是在数学形成和发展过程中离不开的思想，也应是学习了数学之后形成的思维特征。他认为数学基本思想有抽象、推理和模型三种。与数学相关的客观事物通过抽象形成数学研究对象；通过严密的推理得出数学的命题和计算方法；现实世界通过模型创造的数学语言与数学内部搭建起了桥梁^[6]。顾沛在此基础上加以补充，认为数学基本思想还应包括数学审美的思想，通过数学审美，体会“透过现象看本质”等现象中的美，感受到数学“以简驭繁”、“天衣无缝”的魅力，并从“美”的角度发现和创造新的数学^[7]。

本研究认为数学基本思想是数学学科发展史上最最重要的数学思想，较之一般的数学思想具有一定的高度和概括性，数学的基本思想主要指抽象思想、推理思想、建模思想。

1.2.1.2 数学思想

关于数学思想至今没有统一的定义，学者们从不同的角度看待数学思想导致对数学思想的含义众说纷纭。张奠宙和过伯祥认为数学思想被用来泛指某些意义重大、内容丰富、体系完整的数学成果^[8]。曹才翰和章建跃认为数学思想是对数学对象认识过程中提炼出来的具有普遍意义的观点和想法，是指导数学活动进行的重要理论成果^[9]。顾沛认为数学基本思想经过演变、派生、发展得到数学思想，例如，由抽象思想派生出了分类、集合等思想；由推理思想派生出归纳、数形结合、转化等思想；由建模思想派生出函数、方程、优化等思想；由审美思想派生出简洁、对称等思想^[7]。

本研究认为数学思想是指现实世界中的空间形式和数量关系反映在人的意识中，通

过思维活动产生的结果。它是对数学中的知识和方法最根本的认识，是对其中规律理性的理解^[10]。数学思想与数学知识的产生和发展过程密不可分，是对数学知识和方法的抽象概括。数学思想是由数学基本思想派生、发展来的，是基本思想的下位概念。本研究认为初中数学中蕴涵的数学思想主要有：符号与变元、数形结合、化归、特殊与一般、方程与函数、分类讨论、类比联想、数学建模、统计与概率^[11]。

1.2.1.3 数学方法

蔡上鹤将数学方法概括为在科学研究中以数学为工具的研究方法，也就是说将现实世界中事物的状态、相互间的关系等用数学的语言来表达出来，然后再通过严密的推导、计算等过程，以得出解释、判断以及预言现实中事物的手段^[12]。此外，傅海伦指出数学方法是在诸如数学的学习、研究、问题的解决等具体的数学活动中，所形成的操作、流程和范式等，是在这些活动中积累起来的进行数学研究和解决现实问题的方法^[13]。王燕荣认为，以数量关系和空间形式为研究对象时，从问题的发现与提出，再到分析并解决的整个过程中，人们所用到的各种途径、手段及行为规范都可以叫作数学方法^[14]。

本研究认为数学方法是指利用数学思想思考解决具体问题时，对某一类具有相同特征、可以用同一范式解决的问题反复琢磨，不断完善后得出的某一种可操作的法则^[7]。数学方法是数学思想的具体表现形式，如用转化思想思考问题时，则用换元法、消元法、代入法、降次法等。用数形结合思想解决问题，则用图象法。

1.2.1.4 数学思想方法

数学思想方法是对数学知识内容的最根本的理解，属于普遍性的原理。数学思想和数学方法统称为数学思想方法，它包含了思想观念和操作方法两方面的含义^[11]。对于同一数学成果而言，如果从数学体系或其意义和价值的角度论述，就是数学思想；如果运用其解决数学问题时，则为数学方法。由于数学思想和方法的密切联系，许多学者进行研究时对数学思想和数学方法不加以区分，统称为数学思想方法。

由于数学方法操作性更强，对学生的解题有直接帮助，教师在讲授解题技巧时一般都会有所涉及，而数学思想偏向理论性，一般需要通过数学方法来体现，学生掌握数学思想需要潜移默化地渗透，所以容易被教师忽视，或者对思想渗透方法不甚了解，故本文将重点研究关于数学思想的教学状况和渗透方法。

1.2.2 理论基础

1.2.2.1 建构主义理论

建构主义理论的代表人物瑞士心理学家皮亚杰认为,在个体和环境相互作用的过程中逐渐建构产生了知识。个体认知结构为了适应环境变化,通过“同化”和“顺应”而不断发展完善。外部环境中的相关信息经过个体的改造加工,使新的信息内化补充到个体已有认知的过程叫“同化”。当外部环境中的信息无法被个体已有的认知同化时,个体需要调整已有的认知以满足新信息的特点,这一过程叫“顺应”。个体为了适应新的环境,往往会首先用同化的方式将新信息纳入其原认知,如果同化失败,个体就会通过顺应的方式,调整自己已有的认知结构,以达到适应新环境的目的。根据建构主义理论,学习者对数学的学习是动态变化的,既需要经历对知识的探究,还需教师的适当引导,为学生铺设思维的台阶,引导学生完成认知结构的建构。由此可见,学生学习的内容应不仅限于课本知识,还要掌握一些诸如分类、类比等建构的思想。

建构主义理论对于数学思想渗透具有指导意义,一方面,在数学学习中,学生应该在原有认知和经验的基础上,主动建构新的数学知识,并在此过程中感悟数学思想。在这一过程中,教师只是引导者,不能把知识强行灌输给学生,而应引导学生根据已有的经验,对所学知识进行分析,通过新旧知识对比,对已有的认知进行完善。学生只有充分感悟蕴含在知识和方法背后的数学思想,才能真正理解并掌握数学知识,从心理上完成对新内容的建构。另一方面,教师应为学生知识的探索创设情境,在探索过程中给予适当提示,学生独立探索与合作探究相结合,引导学生感悟知识建构过程中的数学思想。建构主义主要提倡支架式教学和抛锚式教学两种教学模式,这两种教学模式都强调充分调动学生的主观能动性,注重以学生为主体的探究过程,在这一过程也是学生感悟数学思想的最佳时期。

1.2.2.2 元认知理论

美国心理学家弗莱维尔指出元认知就是个体基于对认知过程的认识,对自身的认知过程进行反省、控制和调节。元认知知识、元认知体验和元认知监控是元认知理论的三要素^[15]。认知主体、材料任务及策略是元认知知识的主要内容;主体在进行认知活动时,认知或情感体验指的就是元认知体验;主体在认知活动进行中,不断地对认知活动体验、监视、控制和调节就是元认知监控的过程。

数学思想不仅能监控调节认知活动,同时对能力培养也至关重要。学习者在学习具体内容时会选择恰当的数学思想方法策略性地学习,所获得的体验、收获等有或多或少的差异,这个过程就是元认知活动。当与他人分享交流活动体验时,进行的分析、比较、

总结、反馈、批判就是元认知体验，也是元认知监控，如此反复学习的过程也是元认知的过程。学习者对数学思想方法的理解得到巩固加深，数学素养得到培养，同时对数学思想方法的学习促进学习者的元认知活动向更高层次发展。元认知活动与数学思想方法相互融合、螺旋上升^[16]。

根据元认知迁移理论，元认知水平是认知策略迁移的决定性因素。而数学思想就是认知策略之一，故学习者对数学思想的感悟直接受到元认知水平的影响^[17]：一是在元认知知识中，数学思想的形成、提取以及运用是以认知材料、任务方面的知识为基础的。个体根据给定材料进行整体感知，帮助其从已有认知中探寻与新知相关联的原认知，个体能比较容易地搭建起新旧知识间的桥梁，这种关联是数学思想形成的必要条件；二是元认知中有关认知策略的知识促进数学思想的培育，良好的认知策略会让个体体会到感悟数学思想的必要，并积极探索数学思想的运用，进而促进个体对数学思想的理解；三是元认知体验是数学思想感悟的重要环节，在数学思想的感悟过程中，既涉及到对数学知识间和数学方法间内在联系的理解，又涉及反思产生这种联系的原因，在这一过程中，前者是关系的体验，属于认知体验，后者是观念的体验，属于情感体验，所以数学思想的感悟必须要经历元认知体验；四是元认知监控在个体对数学思想的认知发展中举足轻重。在元认知监控的引导下，个体在遇到新的学习内容时，主动关联已有的认识 and 与之关联的数学思想，这将帮助学习者加深对数学思想的感悟，也将促进数学思想内容的完善和丰富。

1.3 文献综述

数学发展历程中，无数数学家锲而不舍地探索，创造出一个个概念、公式、定理、公理等数学知识，在知识背后，凝结着数学家们思维的硕果——数学思想，20世纪以来，国内外无数的研究学者开始了对数学思想的研究。

1.3.1 数学思想的国外研究

作为数学教育“问题解决”的先驱，乔治·波利亚先后出版了《怎样解题：数学思维的新方法》^[18]《数学的发现：对解题的理解、研究和讲授》^[19]《数学与猜想：数学中的归纳和类比；合情推理模式》^[20]，这三部著作是方法论领域的经典之作。波利亚认为数学教育主要是让学生习得从数学角度思考问题的能力。数学思想方法的感悟，不像数学知识，有章可循，过程性是数学思想方法最明显的特征。在知识传授过程中，教师需要将某种特定的数学思想方法全方位地展示给学生，让学生通过自己的理解，去体验、领悟和掌握^[20]。

数学家亚历山大洛夫的《数学——它的内容、方法和意义》清晰地展现了现代数学思想方法的发展改革历史，将蕴藏在数学知识背后的数学思想方法用通俗易懂、简洁明了的语言，由浅入深地展示给读者。他通过对数学发展历史和初等数学的分析，认为数学思想方法是建立和证明关于数学的普遍定理，并提出了数学抽象、精确和应用广泛的特点^[22]。

日本的米山国藏所著的《数学的精神，思想和方法》为我们深入浅出地介绍了在整个数学学科体系中的精神实质、思想、方法等，呈现出近代数学的变革。他从数学发展的角度抽象和总结了数学中较为常见和实用的数学思想，例如极限思想、群和集合的思想等。米山国藏认为数学思想能影响人的一生，因此我们在中小学就要让学生学会利用数学思想思考问题。他认为在初高中学生获得的数学知识很快就被遗忘了，因为他们进入社会后很少有用到这些知识的机会。但是不管在什么岗位上，他们头脑中的精神、思考问题的方式、分析问题的能力等都是影响一生的宝贵财富^[23]。

美国著名数学家 M·克莱因的《古今数学思想》较为全面地介绍和总结了古今数学思想的发展历程，这部著作堪称经典的数学思想教科书。克莱因回顾数学发展史，从数学思想的角度研究了数学的发展过程，为我们了解数学发展史中的重要思想和发展过程提供了重要材料。该巨著对从古至今的数学思想的论述，既是数学思想延续至今的缩影，又有着鲜明的时代特征^[24]。

前苏联数学家弗利德曼曾在《中小学数学教学心理学原理》中指出：数学思想是数学逻辑结构中极其重要且特殊的元素。整个数学科学的建立和发展都基于这些思想。他认为数学思想方法应该占据学校课程的核心地位，数学思想方法还将大纲中所有的概念、题目和章节整合成一门统一的学科^[25]。

1.3.2 数学思想的国内研究

自徐利治教授倡导方法论以来，国内众多数学家、教育学家也都前仆后继地加入到数学思想方法的研究中来，成果颇丰。这为一线教育工作者研究数学思想提供了理论指导。

作为数学方法论的倡导者，徐利治教授出版了《浅谈数学方法论》、《数学方法论选讲》等多部著作，他率先提出“关系映射反演方法”，对数学思想方法进行了深入研究，充分论证了数学思想方法的相关理论，提出许多独特的见解受到了国内外数学界的关注。他认为数学方法是研究数学的重要的工具，数学方法论是一门研究探讨数学活动中各种法则的学问，研究的内容涵盖了数学的发展规律、思想方法、发现、发明与创作等多方面^[26]。他还将数学方法论细分为宏观和微观两部分，宏观方法论研究数学发展规律，微观方法论是对数学中的思想、方法及法则等对象进行研究的^[27]。

郑毓信所著的《数学方法论入门》从整体上分析探讨了数学方法论中一些具有普遍意义的问题，重点介绍了数学各分支的一般思想方法，为教师进行数学教学提供了理论指导^[28]。后又在《数学方法论的理论与实践》中提出以数学方法论为指导的数学教学，他认为在数学方法论指导下进行数学教学，能让老师将数学课“讲活”、“讲懂”、“讲深”^[29]。郑毓信教授在《数学思想、数学思想方法与数学方法论》一文中给出了数学思想的两种含义，第一种含义与数学知识内容完全分离，属于抽象层面，具有更一般的含义，即更偏向数学理论的一面；第二种含义则是更具体，具有方法论意义，对于实际教学有指导意义，而第二种含义指的就是数学思想方法^[30]。

王仲春等教授发表的《数学思维与数学方法论》一文中指出数学思想方法是数学教育和研究的核心内容和根本目的。他们认为对学生数学思维的培养至关重要，教师不仅要注重将数学思想巧妙融入到教学中，还要重视关于数学思想方法的研究^[31]。

史宁中教授对数学思想也有深入研究，先后出版了《数学思想概论》（1~4辑）、《数学基本思想18讲》、《数学基本思想与教学》等多部著作，他多次组织修订《义务教育数学课程标准》，将“基本思想”列为《课标（2011年版）》总目标之一，他在《漫谈数学的基本思想》中明确了判断数学基本思想的两个标准：一是数学的产生发展历程中必不可少的思想；二是学过数学的人所具有的思维特征。他认为数学思想本质上有三个，即抽象、推理和模型^[32]。

在数学家们对数学思想研究的指导下，许多专家学者和一线教师对数学思想有了一定的认识，开始结合教学实际，研究讨论中小学中涉及到的数学思想内容以及数学思想的教学。

1.3.3 初中数学思想渗透的研究

根据文献调研结果，笔者试图把数学思想在初中数学中的地位、价值取向等视角作为切入点，通过大量的文献梳理出教学中渗透数学思想存在的问题，然后以渗透数学思想的方法策略为落脚点，以便为本研究奠定坚实基础。

1.3.3.1 数学思想在初中数学中的地位、价值取向研究

吴增生在《数学思想方法及其教学策略初探》中认为数学思想方法是数学的灵魂。数学思想方法是数学活动实践经验的概括，体现了文化的继承和发扬。实践是产生思想方法的来源，概括是产生数学思想方法的核心，数学思想方法的概括是对具体方法的一般化、程序化和模式化加工过程。数学思想方法的学习必须经历四个基本阶段：模仿体验、明朗化、运用巩固和联系发展^[33]。

毛莉莉在《初中数学教学渗透“思想方法”的策略》提到在初中数学教学中，对学

生进行数学思想方法的渗透十分重要，这样，才能有效地落实“四基”目标，促进数学课堂教学的高效化。教师要重视针对思想层面的渗透、提炼及总结，这样学生才能在掌握思想方法的基础上，体会到数学学习的重要价值，促进学科综合素养的全面提升，为日后对学科本质意义深入研究打下基础^[34]。

卞家海的《核心素养背景下的初中数学思想方法的教学实践》认为数学思想方法是数学学科的根本，它决定了学生对数学问题的思考方式，它可以使学生对知识的掌握更加灵活，帮助学生达到更好的学习效果。教师要深刻认识到数学思想方法教学的必要性，并将其渗透到教学中^[35]。

郑义富在《关于数学精神、数学思想与数学素养的辨析》中将数学思想比作数学之魂。他认为对于数学学科来讲，数学思想是学科的根本，是数学最为突出的特点，支撑起了整个数学学科体系，引领着知识的发展，是数学重大成果的精华。教师要以数学思想切入展开教学，也要以数学思想落脚升华教学，必须要把握好这个重要的育人抓手。学生应将其作为学习数学的最高境界，感悟知识背后的数学思想，汲取“养分”，形成良好的精神品格^[1]。

1.3.3.2 初中数学教学中渗透数学思想出现的问题研究

虽然很多研究者已经认识到了在初中数学教学中渗透数学思想的重要性，但是在实际操作中仍然有很多不尽如人意的地方。从事一线教学的教师对思想渗透中出现的问题发表了自己的看法。

石志群的《对数学思想方法教学现状的思考》发现数学思想方法教学存在以下问题：学生主动运用数学思想意识不强；学生不会用数学思想解决问题；学生不明白某些思想的实质；教师渗透思想时不以学生认知出发，而是贴标签式的“引导”；教师渗透思想时不注重探索的过程，而仅停留在总结；教师对数学思想的定义太随意、太泛滥；教师把数学思想作为题型教学^[36]。

高望祖在《初中数学教学中渗透数学思想方法的现状调查研究》中以靖远县 A 中学为例，指出在初中数学教学中渗透数学思想方法存在的问题有：教师对数学思想方法的认识程度较低；教师在教学设计中不注重渗透数学思想方法；教师在课堂教学中的各环节中不注重渗透数学思想方法。并提出了相应的建议：教师应提高数学思想方法素养；教师应从挖掘教材、教学目标、教学流程等方面在教学设计中渗透数学思想；教师应从导入、知识生成、例题讲解、练习、小结等方面在教学流程中渗透数学思想^[37]。

杨庆芬在《中学数学的思想方法的现状分析及思考》中以初三数学教学研究为例，指出数学思想渗透中存在以下几个问题：教师不重视数学思想方法；教师不能充分提炼数学思想方法；教师缺乏科学的思想渗透形式；学生缺乏合理的学习观念；学生不能主

动运用数学思想方法；学生自身认知水平存在一定差距；学生存在畏惧、厌倦等心理，还有教材编排，教学评价制度等方面的问题^[38]。

付军在的《初中数学教学渗透数学思想的策略》指出渗透数学思想存在脱离实际，忽视基础知识；流于形式，教师讲解思想时只停留在表面；缺乏系统，教师讲解思想存在随机性，没有整体规划等方面的问题，并提出了在初中数学教学中渗透思想的路径：以基础知识为切入点渗透分类思想；用图像类资源渗透数形结合思想；用复杂模型为切入点渗透化归思想；以反向推理为切入点渗透方程思想^[39]。

1.3.3.3 初中数学教学中渗透数学思想的策略研究

在具体的教学策略方面，有相当一部分一线教师投入了很大的热情对此进行了研究，多数都是以课堂教学各环节为主要视角提出渗透数学思想的策略。

徐杰的《数学教学中渗透数学思想方法的教学策略》一文介绍了“制定教学计划，优化教学程序；挖掘教材内容，精选渗透题材；创设教学情境，加强方法应用；注重示例教学，总结思想方法；开展变式训练，形成数学能力”五方面渗透数学思想方法的教学策略^[40]。

蒋美林《课堂教学渗透数学思想方法的意义与实践策略》从知识引入、发展、解题和反思四个角度提出渗透数学思想方法的策略：知识引入阶段进行渗透；知识发展中进行渗透；例题讲解中进行揭示；反思回顾中进行参悟^[41]。

汪小燕《七年级数学教学中渗透数学思想方法策略初探》中阐述了渗透数学思想的几种策略：以知识为主线，深入挖掘思想；抓住本质，透彻分析思想；螺旋上升，反复渗透思想；变式教学，发散学生思维。并提出渗透数学思想方法需要注意逐步渗透，激发兴趣，理清层次等问题^[42]。

俞晓陆在《浅谈数学思想方法在课堂中的高效渗透》中提出教师要在课堂各环节中将数学知识与数学素养相结合，巧妙渗透数学思想，教会学生用数学眼光看待问题，提高问题解决能力，有效提高初中数学教学的质量与效率^[43]。

张琳在《初中数学思想方法在教学中的渗透》中从基础知识的学习、教材例题讲解后的总结、课堂小结中的内化、问题解决时的强化四方面介绍了数学思想方法在初中数学教学中的渗透途径^[44]。

1.3.4 研究述评

根据文献调研结果，国内外关于数学思想的研究成果非常丰富，理论体系已非常完备。无数专家学者前仆后继，都以数学思想为主题进行了深入研究，并对其进行了详细的阐述，为本研究提供了充足的理论基础。

关于初中数学中数学思想的研究,各位研究学者、一线教师对其价值取向都不谋而合,都认为数学思想是数学的灵魂所在,是数学教学活动的核心内容和根本目的,在数学教学中有效渗透数学思想,不仅有助于课标理念的落实,还对学生思维能力、发现问题和解决问题能力的培养具有重要意义。对于在初中数学教学中数学思想教学出现的问题,大家的意见也基本一致:教师对数学思想的认知存在偏差,对数学思想的定义随意、泛滥;教师对渗透数学思想缺乏有效策略,把数学思想当做普通知识来讲;教师渗透数学思想流于形式,“贴标签”现象比较严重;学生对数学思想的掌握情况不容乐观,缺乏应用数学思想分析和解决问题的能力等,这也从侧面反映出大家都意识到在初中数学教学中渗透数学思想已经出现了一定的问题。也有很多文献介绍了渗透数学思想的教学策略,角度相似,基本都是针对教学各环节如何渗透数学思想提出相应的教学建议,这与现状对应性不强,不利于从根本上解决实习学校教学中渗透数学思想存在的问题。

数学思想是数学的灵魂所在,是当数学知识几乎忘却时,唯一能留到脑海中的东西,是会影响人一生的宝贵财富。古今中外的数学家、教育家、专家、学者对数学思想本身以及数学思想在教学中的渗透进行了大量研究,《课标(2011年版)》中将“基本思想”“基本活动经验”写入总目标中,并明确给出了“感悟数学思想,积累数学活动经验”的教学建议。《课标(2011年版)》颁布已近十年,课改理念的落实究竟如何?初中数学教学中渗透数学思想的现状如何?研究中提出的在教学中渗透数学思想的策略对如今的现状是否适用?在教学中渗透数学思想还存在什么样的问题亟待解决?基于此,笔者拟进行初中数学教学中渗透数学思想的现状调查和策略研究。

1.4 研究目的与研究内容

1.4.1 研究目的

长期以来,在应试教育的影响下,大部分教师注重对学生基础知识和解题技巧的培养,而容易忽视更为重要的数学思想的渗透。如此学生机械式地记忆数学概念和解题步骤,表面看似掌握了课本知识,实则不了解知识间的内在联系,不能感悟其中蕴含的数学思想,自然也就无法领会数学之精髓。因此,数学思想的渗透可以帮助学生理解知识间的内在联系,会用理性思维分析问题。为了针对实习学校渗透数学思想中存在的问题,提出解决策略,本研究拟实现以下两点目标:

- 1.通过学生问卷、教师访谈调查,掌握初中数学教学中渗透数学思想“教”与“学”的现状,分析得出现阶段数学思想渗透存在的问题,以期找到目前教学中渗透数学思想出现诸多问题的原因。

2.以课标为指导,对渗透数学思想的优秀案例分析研究,总结经验做法,结合调查研究发现的问题,有针对性地提出在初中数学教学中渗透数学思想的策略,以期解决教师在教学中遇到的困惑,为教师在教学中更好地渗透数学思想提供教学参考。

1.4.2 研究内容

本研究结合课标,以人教版初中数学教材为版本,重点研究初中数学思想的渗透现状调查和策略研究。具体分为以下几部分内容:

1.初中数学思想的文献调查研究

本文从数学思想、初中数学思想渗透现状两个方面展开文献调研,关于初中数学思想渗透现状的文献调研又细分为三个维度:数学思想在初中数学中的地位,初中数学思想渗透存在的问题,初中数学思想渗透的方法策略,通过整理分析得到关于初中数学教学中渗透数学思想的研究现状。

2.初中数学教学中渗透数学思想的现状调查

笔者在文献调研的基础上,对所在实习学校S市某初级中学进行了“初中数学教学中渗透数学思想的现状”调研。学生调研采用调查问卷的形式,调查对象为该校初三年级全体学生,调查问卷分为六个维度:学习兴趣、思想认知、思想渗透情况、思想应用意识、思想掌握情况、思想掌握情况测试。教师调研采用访谈调查的形式,调查对象为该校初中全体数学教师,访谈的维度是:思想认知、思想渗透的必要性认识、思想渗透情况、思想渗透障碍、思想渗透存在的问题。通过整理分析,得到数学思想渗透的现状和存在的问题。

3.初中数学教学中渗透数学思想的案例研究

笔者通过对初中数学教学中渗透数学思想的典型教学案例分析,结合《课标(2011年版)》和数学教材,挖掘案例中的典型经验做法,为下一步提出渗透数学思想的策略奠定基础。

4.初中数学教学中渗透数学思想的策略研究

基于案例研究成果,结合文献调研和现状调研发现的问题,提出在初中数学教学中渗透数学思想的策略,以期能在一定程度上为一线教师渗透数学思想提供教学参考。

1.5 研究思路与方法

1.5.1 研究的整体思路

本研究在理清目前有关数学思想和初中数学思想渗透的理论成果和实践经验的基

础上,通过对学生问卷、教师访谈等方法,弄清笔者所在实习学校 S 市某初级中学数学思想渗透的现状、存在的问题,比较借鉴数学思想渗透教学经验的基础上,结合经典成功案例,提出初中数学思想渗透的策略,为教师渗透数学思想提供教学参考。

1.5.2 研究方法

1.5.2.1 文献研究法

根据本研究目的,研读课标、教材,明确初中数学思想渗透的目标要求;查阅国内外专家学者关于数学思想的文献,了解关于数学思想的最新理论成果;通过对初中数学思想渗透相关文献的研究,梳理出数学思想在初中数学中的地位、数学思想渗透存在的问题以及渗透数学思想的方法策略,在此基础上分析初中数学教学中渗透数学思想的现状,有针对性地进行访谈提纲和问卷的制定,为后续策略的提出提供较为可靠的实证依据。

1.5.2.2 问卷调查法

本研究方法是在文献研究法和笔者实践经验的基础上,根据研究的目的和内容,借鉴山西师范大学研究生李旭丽的硕士毕业论文《高中数学思想方法教学现状的调查研究》^[45]和西藏大学研究生赵永的硕士毕业论文《初中数学思想方法在拉萨市数学教学中的应用现状及对策研究》^[46]确定了调查问卷的内容,调查对象为实习学校初三年级学生。调查问卷从数学学习兴趣、数学思想认知情况、教师授课时数学思想渗透情况、数学思想的应用意识、数学思想的掌握情况、各思想掌握情况的测试六个维度了解初中数学中渗透数学思想的学生学习现状,并分析产生该现象的原因。

1.5.2.3 访谈法

访谈法是研究者有目的的对研究现象进行访问和交流的方法。本研究是以实习学校的全体初中数学教师为研究对象进行访谈,访谈提纲为:初中数学思想教师访谈提纲(见附录 B)。通过访谈,从教师角度了解初中数学中渗透数学思想的现状,并得出渗透数学思想的存在的问题,对从学生角度了解到的数学思想渗透现状进行补充,为后续渗透数学思想教学策略的提出提供实证分析依据。

1.5.2.4 案例分析法

为有针对性地提出教学策略,本研究选取了两个全国初中青年数学教师优秀课评比获奖作品,笔者结合《课标(2011年版)》要求,通过分析得到思想渗透的典型经验做

法，结合一线教学实际，进而提出初中数学思想渗透的策略。

1.6 研究的重难点与创新之处

本研究主要是在文献调研的基础上，通过学生问卷调查、教师访谈调查的方式，对实习学校渗透数学思想的现状进行调查分析，弄清该校数学思想渗透现状以及存在的问题，结合案例分析成果，给出初中数学思想渗透的策略。本论文研究的重点是在对实习学校渗透数学思想的现状调查后，对存在的问题进行梳理分析，结合一线教师经验做法，有针对性地给出初中数学教学中渗透数学思想的策略。但由于笔者的知识水平、实践经验有限，提出的策略可能缺少一定的说服力，需要在教学实践中进一步检验和完善。故本研究的难点是提出有说服力、符合一线教学实际的数学思想渗透策略。

较于类似研究，本研究的创新之处在于结合实习学校的数学思想渗透现状和存在的问题，以知识形成、发展为线索，从课前准备到课堂教学，再到课后反思，全方位、有针对性地提出初中数学教学中渗透数学思想的教学策略，使研究更加符合当地的教学实际，使策略更加具有针对性和可操作性。

第2章 初中数学教学中渗透数学思想的现状调查

初中数学教师在教学中不应满足于教给学生基本的知识和解题技巧，而应该给学生更多数学思想的浸润。因此本章现状调查主要包括两个内容：一是借助学生问卷调查、教师访谈调查两种研究方法从学生和教师两个角度了解数学思想渗透现状；二是基于数学思想渗透现状，对数学思想渗透存在的问题进行梳理、总结，为有针对性地提出教学策略做准备。

2.1 学生问卷调查

学生问卷主要从学习兴趣、思想认知、思想渗透情况、思想应用意识、思想掌握情况、思想掌握情况测试六个方面对实习学校九年级全体学生展开，以期了解学生关于数学思想的学习现状。

2.1.1 调查问卷的设计

借鉴山西师范大学研究生李旭丽的硕士毕业论文《高中数学思想方法教学现状的调查研究》^[45]和西藏大学研究生赵永的硕士毕业论文《初中数学思想方法在拉萨市数学教学中的应用现状及对策研究》^[46]，编制了学生调查问卷。此问卷有两部分内容，第一部分（1-14题）以五级量表的形式，主要调查学生学习数学兴趣以及在学习过程中对数学思想的认知、掌握、应用等情况，第二部分（15-20题）以选项问答测试的形式，主要测试学生对初中常用各数学思想的掌握情况。

表 2-1 学生调查问卷维度及题目表

维度	题目
数学学习兴趣	1、2
数学思想的认知情况	3、4
教师授课时数学思想渗透情况	5、6、7、8、9、10
数学思想的应用意识	11、12
数学思想掌握情况	13、14
思想掌握情况的测试	15、16、17、18、19、20

通过前测信效度均在 0.8 以上，效果良好，最终确定了学生调查问卷内容（见附录 A），题目涉及六个维度，共 20 题，具体安排见表 2-1。

2.1.2 调查问卷的实施及处理

本次调查为 S 市某初级中学的九年级全体学生。利用自习课 20 分钟现场发放问卷，作答完毕可提前上交。本次共发放调查问卷 223 份，回收 223 份，回收率 100%，有效问卷 208 份，有效率 93.27%。分析结果之前对数据进行了可靠性和效度分析。

信度检验：结果分析前，借助 SPSS 26.0 软件对问卷量表题目（除 6 道测试题）进行了信度分析，分析结果如表 2-2 所示。

表 2-2 学生调查问卷的可靠性分析

克隆巴赫 Alpha	基于标准化项的克隆巴赫 Alpha	项数
.900	.900	14

如表 2-2 所示，本问卷信度系数为 0.900，基于标准化项的信度系数也为 0.900，表明此问卷有较高的信度。

效度分析：对本问卷题目进行赋值作答后，借助 SPSS 26.0 软件对问卷进行统计分析，分析结果如表 2-3 所示。

表 2-3 学生调查问卷的 KMO 和巴特利特检验

KMO 取样适切性量数。	巴特利特球形度检验		
	近似卡方	自由度	显著性
.902	1357.783	91	.000

如表 2-3 所示，本问卷效度系数为 0.902，且巴特利特球形度检验 P 值为 0.000，结合因子分析，表明此问卷有良好的效度。

2.1.3 调查问卷的结果分析

2.1.3.1 学生的数学学习兴趣调查

《课标（2011 年版）》中提到数学思想蕴涵在知识形成、发展和应用的过程中，学生在对知识的探索中应通过自主探究、合作交流，循序渐进地感悟数学思想。学生对数学思想的感悟，需要对数学知识探索具有浓厚的兴趣。如图 2-1 所示，31.3% 的学生对数学不是很感兴趣，42.3% 的学生对数学探索研究并不太感兴趣；仅有 18.8% 的学生对数学很感兴趣，23.1% 的学生对数学探索很感兴趣。调查表明，存在部分同学对数学学习和探索数学不是很感兴趣，不利于学生在知识探索中感悟数学思想。因此，教师应充分认识到渗透数学思想的必要性，改变用“题海战术”达到教学目的的手段，强调学生主体地位，精心设计教学过程，将数学知识融入到具体生活实例中，充分调动学生参与数学探索的积极性，让学生逐步感悟蕴含在知识背后的数学思想，体会数学中蕴含的无

穷魅力。

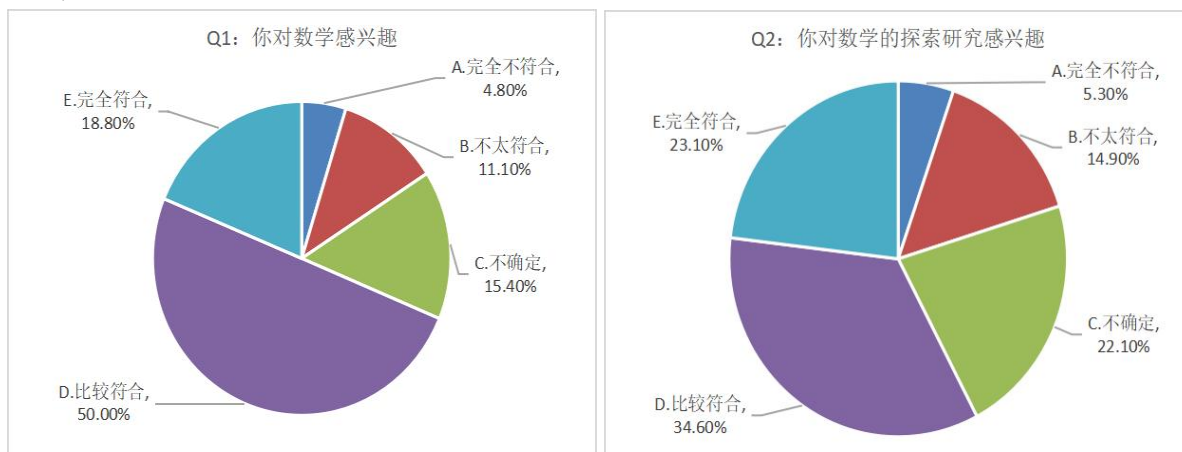


图 2-1 数学兴趣统计图

2.1.3.2 学生对数学思想的认知情况调查

学生对于数学思想的认知情况决定了感悟数学思想的内驱动力，第 3 题意在调查学生对于数学思想的使用意识，第 4 题意在了解学生对数学思想重要性的认识。

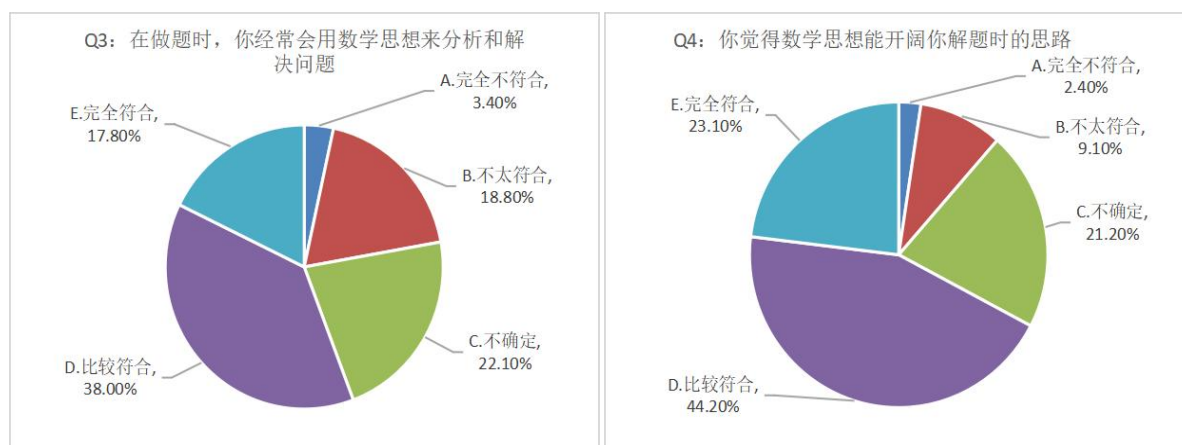


图 2-2 数学思想认知统计图

如图 2-2 所示，44.3% 的学生表示不太会经常用数学思想分析和解决问题，但认为数学思想能开阔解题思路的学生占比高达 67.3%，这表明大部分学生能够认识到数学思想对于解题的重要作用，但是却有相当一部分学生没有使用数学思想分析问题的意识，分析不难得还是学生缺乏对数学思想的应用意识。因此，教师不能直接“贴标签”式给出数学思想的定义和用法，更不能忽略思想渗透，直接告诉学生解题技巧，而应让学生在探索中尝试数学思想的使用路径，指导学生通过试验、观察、猜测、验证、归纳等感悟运用数学思想进行知识探索的全过程，让学生养成主动使用数学思想分析、解决问题的好习惯。

2.1.3.3 教师授课时数学思想应用情况调查

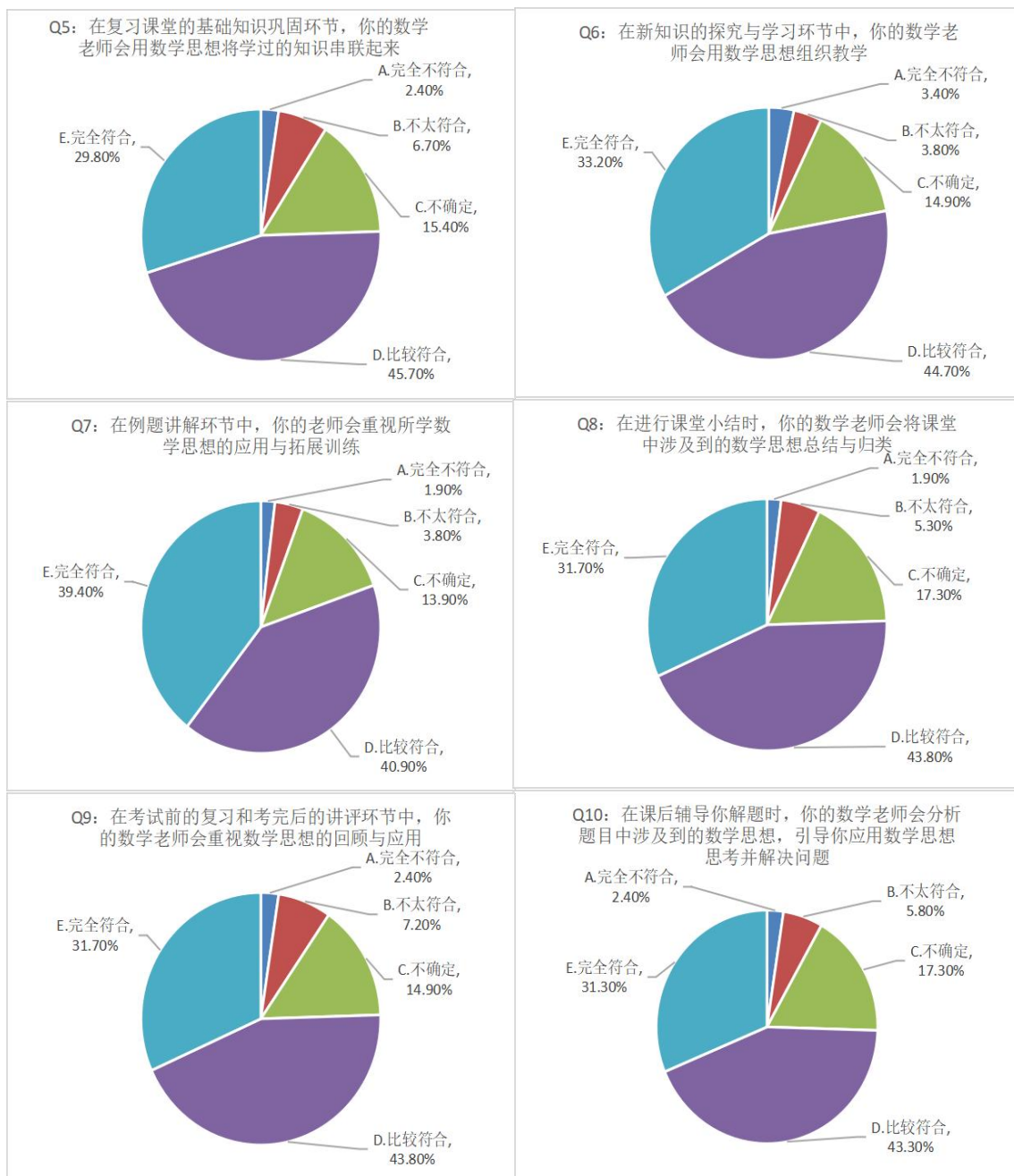


图 2-3 教师授课数学思想应用情况统计图

本维度从学生角度了解教师教学中渗透数学思想的情况, 为全面了解教学中渗透数学思想的教学现状提供学生维度的实证依据。如图 2-3 所示, 75%左右的学生认为教师在复习课、新知探究、例题讲解、课堂小结、考前复习和考后讲评以及课后辅导中会涉及到数学思想; 15%左右的学生认为教师在教学各环节中偶尔会涉及数学思想; 10%左右的学生认为教师在教学各环节中基本不涉及数学思想。

调查表明, 从学生角度来看, 大部分学生认为教师在教学各环节中都会涉及数学思

想,这与上一维度调查反映出“学生不会使用数学思想”产生了矛盾。通过与个别学生交流得知:教师在数学各环节中会涉及数学思想,但基本都是直接告诉学生某数学思想的定义和用法是什么,忽视了学生的情感体验,学生缺乏思辨的过程,没有有效建立起数学知识与数学思想之间的联系,导致学生对数学思想似懂非懂,理解也只停留在表面。因此,教师在教学中不能急于给出定理公式等的结论,也不能直接给出问题解决的技巧,而应注重让学生经历知识探索的全过程,引导学生参与结论的探索、发现、推导、验证的同时感悟其中蕴藏的数学思想,体会数学思想在知识的形成、发展、应用中的重要作用,真正将数学思想内化吸收,进一步提升学生发现、分析、解决问题的能力。

2.1.3.4 学生对数学思想应用意识调查

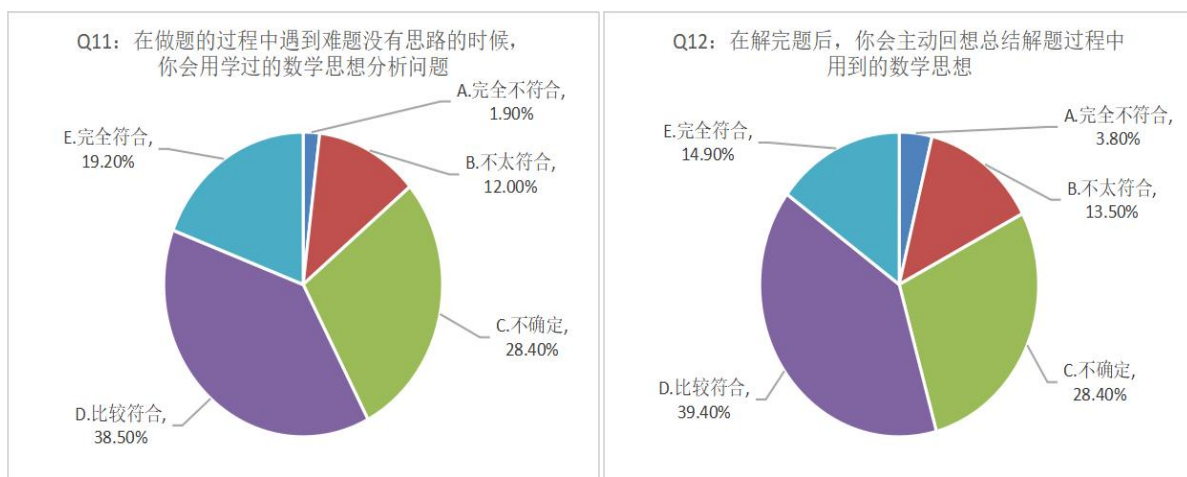


图 2-4 学生数学思想应用意识统计图

本维度旨在调查学生对数学思想的应用意识,如图 2-4 所示,42.3%的学生表示在做题中遇到难题没有思路不太会用数学思想分析问题,仅有 19.2%的学生经常会用数学思想分析问题;45.7%的学生在解完题后不太会主动总结解题过程中用到的数学思想,仅有 14.9%的学生经常会主动总结解题过程中用到的数学思想。遇到难题时,使用数学思想进行分析是解决问题的必要手段,但只有少数同学有这样的思维,这表明有相当一部分学生缺少对数学思想的总结内化过程,缺乏运用数学思想分析问题、解决问题的能力。学生不可能通过某一堂课或某几节课就领会到数学思想的本质,学生要经历大量重复的感悟、理解才能达到掌握运用数学思想的水平。故教师在引导学生进行知识探索和问题解决的过程中,应先让学生不断感悟数学思想,形成感性的认识,不要点明数学思想,经过反复渗透,学生实现了由感性认识到理性认识的飞跃,教师再利用合适机会对某种数学思想进行概括,当显化到一定程度,理性认识有了一定基础,再引导学生运用数学思想分析和解决问题,在学生将数学思想内化吸收的基础上培养学生对数学思想的运用能力。

2.1.3.5 学生对数学思想掌握情况调查

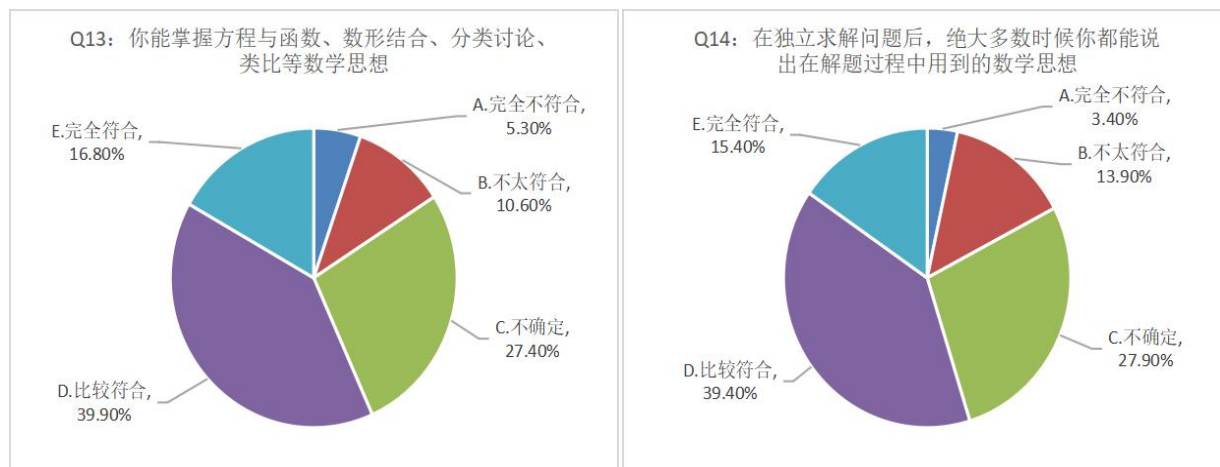


图 2-5 学生数学思想掌握情况统计图

本维度调查学生对数学思想的掌握情况,如图 2-5 所示,43.3%的学生并不能很好掌握方程与函数、数形结合等初中常见的数学思想,仅有 16.8%的学生表示能较好掌握方程与函数等数学思想;45.2%的学生不能说出解题过程中用到的数学思想,仅有 15.4%的学生能肯定说出用到的数学思想。调查表明,学生对数学思想的掌握情况不容乐观,究其原因,教师缺乏有效渗透数学思想的策略,导致学生对数学思想的认知不到位,不能很好掌握数学思想的本质。

2.1.3.6 学生对数学思想掌握测试情况

表 2-4 学生对数学思想掌握测试情况(汇总)

题目	得分								
	0分	1分	2分	3分	4分	5分	6分	7分	8分
15-20 题	3.4%	8.2%	11.5%	14.4%	10.6%	12.5%	22.1%	2.9%	14.4%

为进一步了解学生对数学思想的掌握情况,笔者通过选择题的形式考察学生对初中常见数学思想的了解情况。本研究认为初中常见的数学思想有:符号与变元、数形结合、化归、特殊与一般、方程与函数、分类讨论、类比联想、数学建模、统计与概率^[11],因统计与概率思想较为容易,故这里不做考察。基于此,编制了初中数学思想学生问卷测试部分,题号为 15-20 题,共 8 空,每空考察一种数学思想,每空计一分,共计八分,测试结果如表 2-4 所示:17.3%的学生对数学思想掌握较好(7-8 分),45.2%的学生对

数学思想掌握一般（4-6分），37.5%的学生对数学思想掌握不太好（0-3分）。测试表明，学生对数学思想掌握不容乐观，而且每道题目都是让学生判断某一具体情境中使用了哪些数学思想，已经对求解过程进行提示，不需要学生计算求解，在这样的情况下尚且如此，如果在没有任何过程提示的情况下进行测试可能会更糟糕。由此可见，学生对数学思想的认识还仅停留在了解程度，不能理解数学思想的本质，更达不到掌握运用的水平。因此，教师不能将渗透数学思想理解为教会学生解题技巧，当学生对某些数学思想有了初步认识后，教师要引导学生积极参与问题解决过程，充分发挥数学思想对解题前思路的导向作用，问题解决后及时反思和提炼数学思想，让学生在解决问题的同时，逐步实现对数学思想的认知由感受、领悟到掌握、运用的升华。

表 2-5 学生对数学思想掌握测试情况（分项）

题号	Q15	Q16	Q17	Q18	Q19	Q20(1)	Q20(2)	Q20(3)
考察数 学思想	分类 讨论	数形 结合	类比 联想	转化	特殊与 一般	符号与 变元	方程与 函数	数学 建模
错误率	44.7%	34.1%	46.2%	39.4%	60.1%	37.5%	18.8%	58.7%
正确率	55.3%	65.9%	53.8%	60.6%	39.9%	62.5%	81.2%	41.3%

由表 2-5 可知，学生对方程与函数思想掌握较好（正确率 81.2%），对数形结合思想（正确率 65.9%）、符号与变元思想（正确率 62.5%）和转化思想（正确率 60.6%）掌握一般，对特殊与一般思想（正确率 39.9%）和数学建模思想（正确率 41.3%）掌握较差。结合前面几个维度调查结果和测试题目不难得出，掌握一般及较好的这几种思想辨识度较高，如方程和函数的形式极易判断，数形结合中的图形非常直观，符号与变元中的符号容易辨认。特殊与一般思想、数学建模思想的辨识度不高，学生在没有其掌握本质的前提下不太好辨认。但如果让学生完成没有提示的计算题结果不会这么理想，其实还是反映出学生对数学思想的认知不深刻，停留在表面，知其然而不知其所以然。

2.1.4 学生调查问卷分析总结

根据调查分析，特将学生调查结果作如下总结：一是学生的认识有失偏颇，具体表现为对数学探索缺乏兴趣，缺乏主动学习的观念，不会主动去思考数学思想与知识间的联系，没有用数学思想分析问题的意识，也没有主动总结解题过程中用到的数学思想的习惯。二是学生缺乏相对科学和恰当的学习方式，具体表现为学生仅通过大量的记忆、模仿、重复练习等方式来学习数学思想，忽视了数学思想的方法性，不能真正感悟数学思想的内涵。三是学生对数学思想的掌握效果较差，应用能力有待提高，学生不能准确说出解题中用到了哪些数学思想，也不会用数学思想分析、解决问题。

总体来讲,教师在教学中各环节都会涉及数学思想,而学生对数学思想的掌握运用情况不容乐观,为了深入探究师生对数学思想重视程度与学生掌握、应用数学思想之间产生矛盾的原因,笔者对教师进行了访谈调查。

2.2 教师访谈调查

为进一步了解该校初中数学中渗透数学思想的教学现状,笔者设计了教师访谈调查。因为该校教师教学岗位的安排一般采取循环制,所以笔者对该校包括九年级在内的10名初中数学教师进行了访谈,以便进一步分析问卷调查结果中呈现出在数学思想渗透方面教师付出多而学生掌握差的原因。下面精选一些有代表性的回答,供分析用。

从基本信息来看,参与访谈的十名教师多为经验丰富的中年教师,仅有一位教龄一年的青年教师。年龄集中在35-50岁之间,数学教学年限12-26年不等,学历均为本科。

问题1:初中数学中涉及到的数学思想有哪些?您认为数学思想重要吗?

W老师:初中的数学思想有化归思想、数形结合思想、方程思想、函数思想。还有一般与特殊的思想,但用的不多,一般涉及到定理的推理证明才会用到。数学思想还是挺重要的,数学思想对于培养学生数学素养很有帮助,还有可能会影响学生一生的思维方式。

A老师:初中数学思想有很多,比如数形转换、分类讨论、代入、类比、消元、转化。数学思想能帮助学生掌握解题的技巧,针对不同的题型,学生掌握合适的解题技巧可以快速解题。

此维度调查两方面的内容,一是教师对数学思想含义的认识,二是教师对数学思想重要性的认识。通过访谈可知,该校教师对数学思想有一定认识,多数教师能说出初中常用的几种数学思想,并认识到数学思想不仅能提高学生解题能力,而且在培养学生数学素养等方面都有着重要作用。但也有部分教师对数学思想的认识过于片面,容易将数学思想与数学方法混淆。教师必须对数学思想有全面的认识,才能在教学中有效渗透,才能充分发挥数学思想的重要作用。

问题2:您认为有必要在教学中渗透数学思想吗?为什么?

Y老师:理解知识背后的数学思想,可以帮助学生更好地理解数学概念,找到解决问题的方法。教学中渗透数学思想还是很有必要的。但是由于数学思想是隐形的,比较抽象,往往只有少数学生可以掌握。

C老师:有必要的。数学思想在解题中的作用很大,例如用方程思想去解决问题,用画辅助图去解决难以理解的代数问题,通过搭建桥梁把要学的知识转化成已经学过的知识。

H 老师：之前我觉得在教学中渗透数学思想挺有用的，我也一直在坚持这样做，但感觉给他们各种讲完之后改变不是很大，成绩也没有提高多少，我现在有点犹豫要不要坚持下去。

此维度调查教师对数学思想渗透的必要性认识。根据访谈，教师普遍认为很有必要渗透数学思想，数学思想既能帮助学生理解数学知识，还能提高学生的解题能力。然而由于渗透效果不佳，教师犹豫是否要坚持渗透数学思想。因此教师应积极探索数学思想教学效果不佳的原因，改进思想渗透方式，以发挥数学思想的重要作用。

问题 3：您在日常教学中经常会渗透数学思想吗？一般是以什么样的形式渗透的？效果怎么样？

M 老师：会渗透。新课和练习课都会讲，一般就是把里面用到的思想方法会告诉学生，好一点的学生能听懂也能记住，中等以下的学生遇到类似的题又搞不清其中的方法了。

W 老师：经常涉及啊。课本中关于某些概念的推导过程会体现数学思想，其间会给学生提到数学思想；课本上单元小结部分，在总结时也会讲到本章涉及到的数学思想。

H 老师：会涉及啊。但大多时候都是简单的提一下哪道题体现了什么数学思想，展开讲太浪费时间，会影响教学进度。学生似乎只停留在对数学思想的了解上，不会用数学思想来思考问题。

此维度调查教师对数学思想的渗透情况。通过访谈发现，教师在教学各环节中普遍都会涉及数学思想，但渗透缺乏深度且方式单一。大部分教师都是直接告诉学生数学思想的定义，而不注重学生对数学思想的感悟。数学思想蕴含在知识形成、发展的过程中，教师不能用显化的语言直接告诉学生数学思想的定义，而应引导学生在知识探索中逐步感悟数学思想。

问题 4：您认为在初中数学中渗透数学思想有哪些障碍？

M 老师：我觉得最大的障碍就是缺乏相应的教学研究，我们教研组的同事们都觉得数学思想很重要，但都是涉及到的时候提一下，没有在教学设计的时候考虑把数学思想渗透进去，也不知道该怎么去渗透。

L 老师：问题在时间不够。迫于中考压力，在平时教学中大部分时间都是按照书本上的内容讲解，主要是针对不同的题型讲解不同的解题技巧，对数学思想讲授的深度不够，所以大部分学生停留在了解层面，不会应用。

G 老师：我觉得作为我们老师对数学思想的理解也不是很到位，虽然知道数学思想有哪些，但对于怎么教，什么时候教并不清楚，只能按照知识点来讲，但感觉收获的效果不是很好。

此维度意在调查教师在数学思想渗透过程中遇到的障碍。调查发现，大部分教师缺

少数数学思想方面的教学研究，导致教师对数学思想的理解不到位，缺乏系统成熟的渗透策略。由于存在诸多障碍，教师没有形成科学合理的渗透方法，学生对数学思想的理解也只能是一知半解。因此，教师应对数学思想的渗透引起足够重视，进行相关教学研究，从而形成系统成熟的渗透策略。

问题 5：您认为在初中数学中渗透数学思想还存在什么问题或困惑啊？

S 老师：我才入职不久，数学思想在大学期间也学过很多，我也很想在教学中渗透，培养学生的核心素养。但是不知道具体该怎么入手，我也尝试找过课标，但课标中的指导太概括了，还是不知道该怎么细化到教学日常中去。

C 老师：我现在比较困惑的是如何平衡渗透教学思想和因此而耽误的教学进度的问题。渗透数学思想对学生好处很多，但是一深入讲解就会影响教学进度，讲的太浅了又没啥效果。

此维度调查教师在数学思想渗透过程中存在的问题及困惑。调查表明，教师没有明确的渗透目标，缺乏科学合理的渗透方法，究其原因是教师对课程标准的解读不到位。由于课程标准具有高度概括性，教师无法理解课标对数学思想渗透的相关要求，此时教师应借助权威专家对课程标准的解读，利用教研平台探讨如何有效落实课标要求，以明确思想渗透目标，形成科学合理的渗透策略。

综合上述访谈结果，教师对数学思想的掌握情况还是比较可观的，基本都能说出初中常见的数学思想，但也有个别教师将数学思想与数学方法混淆，将便于解题的方法技巧都归入数学思想，这样的理解是过于宽泛的。教师普遍能认识到思想的重要作用，认为数学思想能提高解题能力，帮助学生养成良好的思维品质。教师们都认为在初中数学教学中渗透数学思想很有必要，数学思想有助于学生对概念的理解、知识网络的构建，更对启发学生解题思路有很大帮助。教师在教学各环节中也会涉及到数学思想，但普遍表示渗透的层次较浅，渗透的方法比较单一，一般都是在讲课过程中涉及到某些数学思想时给学生指出用了哪些数学思想。教师还是偏向学生基础知识和基本能力的培养，难以平衡数学思想渗透和因此耽误的教学进度之间的矛盾。教师对课程标准的解读不到位，缺乏明确的数学思想渗透目标，也没有进行过数学思想渗透的教学研究，更不知道应该如何将数学思想渗透到教学中去，只能按照自己的理解来讲解数学思想。

2.3 初中数学教学中渗透数学思想的现状

整体来看，学生对数学思想的学习呈现出“低兴趣，多被动，缺方法，少收获，难应用”的特点。具体表现为以下几点：

1. 学生对数学思想的认知观念有偏差。其一，学生缺乏主动学习的意识，有相当一

部分学生对探索数学缺乏兴趣，很少有利用数学思想分析、解决问题的意识，在问题解决之后也不会主动去总结用到的数学思想；其二，学生的学习目的过于狭隘，很多学生认为学习是为了考试，所以很少想到用所学到的数学知识与方法去寻求解决问题的策略。其三，学生普遍存在被动的学习观念，怎么学，学什么，学到什么程度，完全处于老师的支配下，教师用显化的语言介绍数学思想，学生就习惯把定义记下来，而不主动思考数学思想与知识间的联系、数学思想对解题的作用等问题。

2.学生对数学思想的学习方式亟待改变。数学思想是方法性的知识，教学时需要创设给学生体验、辨析、交流、反思等主动学习的机会，让学生去“悟”出思想方法。而在实际教学中教师却用显化的语言直接告诉学生数学思想的含义及用途，学生就用记忆、模仿等事实性知识的学习方式来学习数学思想，导致学生不能理解数学思想的原理，不能将数学思想与数学知识产生、发展联系起来。

3.学生对数学思想的掌握情况较差，应用能力待提高。由于学生缺乏相对科学和恰当的学习方式，学生仅是对数学思想停留在表面的感性认识，不理解数学思想的内涵所在，不能将数学思想灵活运用到问题解决中去。具体表现为学生能说出一些数学思想，知道其说法但不知道该怎么用，遇到具体问题时，学生没有运用数学思想方法的意识，学生也不会主动去总结解题过程中用到的数学思想。学生对数学思想的认识仅停留在对其含义的感性认识，但尚未上升至对其本质的理性认识，也不具备应用数学思想分析和解决问题的能力。

教师对数学思想的教学则呈现出“偏认知，常涉及，浮表面，低回报，较重视，少研究，多困惑，少策略”的特点。具体表现为：

1.教师对数学思想的认知有偏差。一方面，虽然绝大多数教师能说出初中教学中涉及到的各种数学思想，但也有个别教师容易将数学思想与数学方法混淆，认为解题方法类的知识都属于数学思想的范畴，这样的理解显然是过于宽泛的，数学思想是对数学知识和方法的本质认识，是对知识和方法的高度概括，所以不能将两者混为一谈。另一方面，教师的思想认知有失偏颇，认为只需按照事实性知识的教学方法来讲解数学思想。然而，数学思想属于方法性的策略，不能将其当作事实性的知识通过大量的记忆、模仿、练习来习得，而需要让学生在探索知识的过程中充分感悟数学思想的本质。

2.教师虽然在教学中会涉及数学思想，但多浮于表面，并未揭示数学思想的本质。在实际教学中，“贴标签”现象较为严重，教师在渗透过程中容易造成知识与思想“两张皮”的现象，教师仅是用显化的语言点明涉及到的数学思想，实际上并未内化吸收为学生自己的方法性知识，当学生遇到了新的问题情境时，没有用数学思想分析解决问题的意识，导致学生对数学思想的应用能力较差。

3.教师都能认识到数学思想的重要作用，在课堂中也会有数学思想的教学，但很少

进行相应研究。大部分教师都能认识到数学思想在学生数学学习、培养数学素养、发展思维能力的重要作用，并会在教学各环节中点明涉及到具体哪些数学思想，但渗透具有“随机性”，没有课前精心地设计，较少对渗透数学思想进行专门的教学研究，在教研活动中也很少涉及数学思想的课题，教师对于怎么渗透，渗透到什么程度等问题也不甚了解。

4.由于缺乏相应的研究和理论指导，教师对渗透数学思想还存在诸多困惑，难以形成系统成熟的渗透策略。教师对课标中概括性的教学建议理解不够深入，加之缺乏相应教学研究，教师常产生“没时间渗透数学思想”、“数学思想的教学效果不佳甚至劳而无获”、“课标中的教学建议该如何落实到教学实践中”等困惑，教师按照自己的理解渗透数学思想，没有形成系统成熟的渗透策略。

2.4 初中数学教学中渗透数学思想存在的问题

1.思想认识有偏差，师生认知待提高

师生对数学思想的认知均有所偏差。一方面，教师对数学思想的内涵理解不深入，把属于方法论范畴的数学思想当做事实性知识来讲，通过记忆、模仿、大量练习来让学生掌握数学思想；另一方面，学生缺乏主动感悟数学思想意识，老师用显化语言点明数学思想的定义学生就只记下定义，而不去探索其本质，内化吸收为方法性知识。数学思想的感悟需要学生在知识探索中，通过试验、观察、猜测、验证、归纳等途径逐步感悟数学思想，从而内化为方法性的知识，用于分析、解决问题中去。教师和学生的认知偏差，把数学思想当做事实性的知识来记忆、模仿，只会导致数学思想渗透浮于表面，流于形式，学生无法内化吸收。

2.思想渗透不深入，教学方式待改进

受传统教学影响，教师在教学中存在“重结果，轻过程”现象，普遍存在直接告诉学生结论后通过大量题型练习总结出不同题型的解题技巧的现状。教师直接向学生点明数学思想的概念，根本不注重学生在探索知识过程中对数学思想的感悟，学生没有掌握方法性知识的学习方法，通过记忆背诵定义来学习数学思想，导致数学思想渗透不深入，学生并未实现对数学思想真正意义上的掌握，无法内化吸收为分析、解决问题的能力。

3.思想渗透缺指导，课标研读不透彻

《课标（2011年版）》中明确对“感悟数学思想，积累数学活动经验”方面提出了相关教学建议，但教师表示概括性太高，不知道该如何具体实施。课程标准是国家对基础教育的基本规范和质量要求，作为纲领性文件，不可能具体到教学环节中的每一步，所以教师应该充分透彻的研读课标，遇到困惑可以阅读有关专家学者对课程标准的解读，

与同事分享交流学习，共同研究如何落实课标要求，具体应怎样渗透数学思想，渗透应达到怎样的教学目标等问题。

4. 思想渗透多困惑，教学研究待丰富

教学研究是解决教学中出现的问题，改变教学现状的重要途径。然而，教师在教学中讨论的基本上都是有关如何提升学生学习成绩，如何教会学生解题等问题，几乎不涉及渗透数学思想方面的问题，这导致教师在渗透数学思想方面出现的许多困惑得不到解决，例如，为什么要渗透数学思想，渗透数学思想浪费时间，渗透数学思想的教学效果不佳甚至劳而无获等。

5. 思想渗透少策略，目标层次待明晰

数学思想的渗透不可能一蹴而就，需要不断重复的感性认识，整体上感受数学思想，当达到一定程度时，才可以上升为理性认知，经过大量重复的思考，理性思维的积累，学生才能逐渐理解数学思想的实质，进而应用到分析解决问题中。教师在数学思想渗透过程中缺乏明确的目标层次，没有系统成熟的渗透策略，忽视学生掌握情况，忽视知识发展过程，涉及到数学思想时只是用抽象概括的语言告诉学生数学思想的概念，这样学生只会单纯地记忆，并不能理解概念背后蕴含的实质，学生自然无法达到熟练掌握、灵活运用数学思想的层面。

第3章 初中数学教学中渗透数学思想的案例研究

为了改善实习学校数学思想渗透的现状,针对存在的问题提出切实可行的教学策略,笔者选取了两个全国初中青年数学教师课例展示活动中的优秀教学案例,通过对案例的分析,提炼出典型经验做法,为下一步提出更具说服力的思想渗透策略提供实证基础。

3.1 案例1——正比例函数的教学案例分析

《标准(2011年版)》中将正比例函数划为“数与代数”领域函数部分,是学生学习特殊函数的第一阶段,是在对函数概念初步理解的基础上,具体讨论正比例函数这类最简单的初等函数。正比例函数作为特殊的一次函数,正比例函数概念的学习既可以加深对函数概念的认识,又进一步巩固了正比例变化规律的认识。通过图象和解析式,直观地得到正比例函数的性质。通过对正比例函数概念、图象、性质的学习,学生习得研究初中函数的一般步骤(定义—作图—观察—性质),为下一步学习一次函数、二次函数和反比例函数做了很好的铺垫。

正比例函数(第一课时)教学的重点在于理解正比例函数的概念,实习期间教师多数都急于将正比例函数的定义引出,然后通过大量的练习巩固深化。然而函数中蕴涵着大量的数学思想,如何利用好这一素材将数学思想无形地渗透到教学中去,让学生在知识的探索中感悟数学思想,体会数学思想在解决问题中的重要作用。下面笔者以第十二届全国初中青年数学教师课例展示活动中优秀课例吴娜老师的《正比例函数(第1课时)》^[47]片段(课堂实录见附录C)为例展开分析。

此案例充分挖掘教材,精心设计课堂活动流程,将数学思想渗透到函数知识探索的各个环节,引导学生独立思考、合作探究,总结出函数研究的一般途径,感悟数学思想在分析问题、解决问题中的重要作用。此案例中渗透数学思想的理念和许多做法值得我们借鉴,具体表现为以下几个方面。

3.1.1 明确目标,思想渗透落到实处

本案例的教学目标:(1)理解正比例函数的概念,能判断两个变量之间的关系是否为正比例函数关系,能根据已知条件确定正比例函数的表达式。(2)经历观察、比较、分析、分类、抽象、归纳的认识正比例函数概念的过程,为进一步学习其他函数积累经验。(3)感受函数知识间的内在联系,初步体会函数研究的一般思路与方法。

部分一线教师虽按照三维目标制定教学目标,但其中不乏形式化表达,看似贯彻了

课标理念，实则不具有可操作性，太过形式化。为了完成渗透数学思想的任务，教师应制定明确的、可操作性的思想渗透目标。本案例更注重让学生在理解掌握知识的同时感悟数学思想方法，所以在教学目标中就明确提出让学生经历观察、比较、分析、分类、抽象、归纳的认识正比例函数概念的过程，为进一步学习其他函数积累经验。这就是要让学生在正比例函数概念的抽象、建立过程中，体会研究函数的方法，从中感悟分类、建模、数形结合、函数、特殊到一般以及类比联想等思想。

吴老师将课标要求体现在目标中，落实在行动上，既加深了学生对正比例函数概念的理解，又让学生感悟到数学思想在知识体系建立中的重要作用。因此，教师在教学设计时需要制定明确的思想渗透目标，让思想渗透与知识探索有机融合，为教学流程的设计以及课堂教学的实施提供方向上的指引。

3.1.2 以生为本，教师引导启发思想

课堂中，吴老师以生为本，给学生营造了良好的探索学习氛围，用足够多的时间开展小组合作研究，展示讨论交流，引导学生明确函数与其他数学模型有相同的研究路径，即从特殊到一般的研究路径，帮助学生实现认知与态度上的跨越，学生通过观察、分析、归纳等探索活动中，在具体问题情境中理解数学思想的深刻内涵。让学生成为课堂的主体，极大地激发学生积极主动探索未知领域的兴趣。

学生通过探究不同函数解析式的联系与区别，完成对不同函数的分类。吴老师结合学生的讨论与思考，明确特殊函数的分类是以解析式的特征为分类标准的，形成函数概念，建构了正比例函数的概念。学生在丰富情境中自主建立函数模型，在分类辨析中感悟函数类型差异，在抽象归纳中概括同类函数共性，在分层应用中内化特殊函数本质，活动中渗透了分类、抽象、建模、特殊与一般、数形结合等数学思想，使数学素养落地生根。整个教学流程的设计都是以学生探索为主的，只有这样学生才能学为所用，将数学思想内化为方法性知识。

由此可见，渗透数学思想需要充分发挥学生的主体地位，教师加以适当引导启发。教师应始终坚持以学生为中心，为学生营造知识探索的环境，引导学生完成知识的建构，启发学生体会数学思想在其中的重要作用，让学生在知识探索的同时感悟数学思想。

3.1.3 注重过程，探索新知感悟思想

很多教师认为教学任务很重，没有时间渗透数学思想。而本案例同样是用一节课的时间，但却把数学思想渗透得淋漓尽致。吴老师将数学思想与整个教学过程深度融合，全篇没有提一次数学思想，却整个过程都在渗透数学思想。吴老师在教学中引导学生经历了“情境与问题——共性分析与归纳——本质特征的抽象下定义——关键词辨析——

简单运用联系与综合”的过程，让学生通过观察、分析、归纳、概括，经历概念的抽象过程，引导学生抽象概括出研究初中常见函数的一般步骤，让学生在探究的过程中感悟其中蕴含的数学思想：从特殊的正比例函数入手研究函数，体会从特殊到一般的思想；从实际问题中抽象出函数概念，渗透函数思想；对不同函数分类体会分类思想；类比其他模型，建立函数模型感悟类比联想、数学建模思想；绘制制定正比例函数图像，引导学生从数和形两个角度观察归纳函数特征，渗透数形结合思想。这是吴老师将数学思想与教学过程的深度融合，真正意义上体现了在教学中渗透数学思想，学生在探索中轻松掌握了正比例函数的概念，还接受了数学思想的熏陶。

吴老师引导体验知识探索过程，无形中感受到数学思想的熏陶，渗透数学思想几乎没有影响到教学进度，这样的做法很好地解答了部分教师没时间渗透数学思想的困惑。因此，教师要将数学思想与教学过程深度融合，注重学生的过程体验，让学生充分体会知识形成、发展的全过程，逐步感悟知识背后蕴含的数学思想。

3.1.4 整体把握，循序渐进显化思想

学生对数学思想的掌握不是一蹴而就的，教师对数学思想的渗透应该是潜移默化的，学生不可能通过一节课就掌握一种或几种思想，学生对数学思想的了解、掌握、应用是一种量变到质变的过程。很多教师急于将数学思想当作知识点来讲，然后通过练习巩固，实际上是本末倒置，数学思想是从学生潜移默化的“了解、感悟”到师生合力形成“显化”的思想，再到推广后的“应用”。本案例吴老师在整个教学过程中没有提到一次数学思想，却处处都在渗透数学思想，这就是在通过不断地强化、渗透，让学生对某种思想有一定的了解、感悟，等学生的了解达到一定程度时再向学生点明数学思想的实质，此时学生才能叫真正意义上的掌握了思想，才能实现对思想的熟练运用。

吴老师循序渐进显化数学思想的做法值得我们学习。教师应整体把握数学思想的渗透过程，将数学思想潜移默化地渗透到教学活动中，让学生不断重复地感悟数学思想，使学生形成对数学思想的初步认识，教师用显化的语言加以点化，使学生逐步实现对数学思想的掌握。

3.2 案例2——算术平方根的教学案例分析

按照《课程标准（2011年版）》的要求，教师要充分认识到数学思想与知识发展间的密切联系，将数学思想与课堂活动充分融合，让学生在活动体验中借助数学思想构建起知识体系。因此落实课标思想渗透理念主要体现在学生探索的过程中，教师要通过巧

妙的设计,让学生在潜移默化中逐步感悟数学思想。下面笔者再以第十一届全国初中青年数学教师优秀课展示活动中段碧老师的《算术平方根》^[48](课堂实录见附录D)为例,探索如何落实课标理念,引导学生感悟数学思想。

此案例在充分钻研《课标(2011年版)》的基础上,把握教材和学情,从学生的视角参与概念的发生、发展,根据教材对部分内容进行了重组,利用“七巧板”、“神秘工厂”、“Excel计算”等工具,将数学思想与知识探索有机融合,思想的渗透帮助学生更好地建构知识体系,知识探索的过程又让学生体会到数学思想在其中重要的作用。此案例对于落实课标渗透数学思想的理念和做法值得我们学习和借鉴,具体表现为以下几个方面。

3.2.1 注重过程,启发引导重感悟

《课标(2011年版)》中的基本思想和基本活动经验是在基础知识和基本技能的基础上新增的,新元素的加入,势必会对“双基”的渗透有所影响,如何平衡好知识与技能和思想与活动体验间的关系,对于有效渗透数学思想具有重要意义。段老师对这部分处理得恰到好处。

“算术平方根”一课属于概念探究课,内容主要包括算术平方根的概念、表示方法、计算方法以及用夹逼法估计 $\sqrt{2}$ 的大小。段老师在充分研读课标、教材,掌握学情的基础上,设计了一系列以学生探索为中心的活动,注重学生的过程体验,让学生知道每一环节是在做什么?为什么要这样做?

利用有趣的七巧板拼图游戏,教师带领学生开始知识探索,通过拼图学生建立起了数与形的关系,构建起了数学问题的直观模型,从形的角度证明了 $\sqrt{2}$ 的客观存在。接着,进一步探索正方形面积与边长的关系,将正方形的面积由具体的某一个完全平方数到某一个正数,再到更具一般性的任意非负数,基于具体问题情境抽象出了算术平方根的定义,自然引出平方与开方互为逆运算,会用符号表示一个数的算术平方根。由实际问题逐步抽象为数学问题的过程中,学生对数与形的互相转化,对形帮助解决数的问题有了一定的感知,初步建立起数感和符号感,感知了数形结合思想、特殊到一般、符号与变元思想,发展了抽象思维,体会到数学源于生活。然后,学生通过参与游戏互动,探索算术平方根的性质,通过与老师的交流互动,对算术平方根的概念有了进一步理解。

对于探究 $\sqrt{2}$ 的大小,教师为学生设计了一系列的探索活动,第一次是通过拼图让学生发现面积为2的正方形边长无法用学过的数表示,从形的角度引出了客观存在的 $\sqrt{2}$,后又借助数轴,再一次让学生从形的角度感受了 $\sqrt{2}$ 的大小,将范围缩小在1.4-1.5之间,但由于无法准确获得 $\sqrt{2}$ 的大小,引导学生基于算术平方根的性质,将 $\sqrt{2}$ 的大小进一步锁定在与之相邻的不足近似值和过剩近似值之间,期间为了节省时间、激发学生

兴趣,借助表格的计算功能提高估算效率。通过大量的估计,精确度越来越高,最后得到 $\sqrt{2}$ 是一个无限不循环小数的结论,让学生初步感悟极限的思想。一系列的探索活动,层层深入,自然流畅,符合学生的认知习惯,逐步引导学生不断探索,帮助学生进一步感悟数形结合思想、极限思想,达到了很好的教学效果。

段老师的案例启发我们渗透数学思想要注重学生的过程体验。教师应在课前精心设计教学环节,注重学生探究新知的过程,让学生积极参与,主动思考,使学生在探索过程中逐渐形成对数学思想清晰的认识,启发、引导学生用数学思想思考、解决问题,使学生从感悟数学思想,逐步达到掌握、运用数学思想。

3.2.2 激发兴趣,信息技术助探索

笔者在前期的现状调查中发现,由于数学的抽象性和本身的难度,导致相当一部分学生对数学不感兴趣,不愿意主动去探索数学,这也给学生主动去探索数学思想造成了一定困扰。段老师将数学课堂与信息技术深度融合,利用现代教育技术工具,活跃课堂氛围,充分调动了学生的学习兴趣,学生们主动加入到数学知识的探索、数学思想的感悟中。

教师通过“七巧板拼图”的引入,让学生从形的角度体会到 $\sqrt{2}$ 的存在,同时自然产生了认知矛盾,认识到算术平方根产生的必要性,既符合学生的认知,同时还激发了学生探索的兴趣。七巧板的可操作性、趣味性,让每位学生都主动参与到探究的过程,感悟数形结合的思想。借助“神秘工厂”动画的设计,很好了解决了本节课的难点:让学生了解算术平方根的非负性。形象生动的动画设计,引起了学生的高度关注,同时通过游戏让学生在潜意识中形成了算术平方根与被开方数的“一一对应”,突破了学生理解算术平方根和被开方数非负性的难点,将特殊值-1代入“神秘工厂”中得不到算术平方根,推广得到算术平方根和被开方数都不能为负数,引导学生感悟从特殊到一般的思想。利用 Excel 表格的计算功能,估计更加精确,更节省时间,让学生有更多的时间去感悟其中蕴含的极限思想。

面对学生缺乏探索数学的兴趣,教师可以恰当运用现代教育手段,利用趣味游戏、动画演示、几何画板等工具,将抽象的数学思想形象化,调动学生参与课堂活动的积极性,激发学生探索数学的兴趣,引导学生在充分参与课堂活动的基础上感悟数学思想。

3.2.3 梳理教材,合理重组促认知

段老师教学环节的设计是在充分研读课程标准和教材的基础上进行的,教材中通过生活中的问题把算术平方根与实际联系起来,将“已知正方形的面积求边长”的实际问题转化成了“已知一个正数的平方,求这个正数”的数学问题,接着引入了算术平方根

的概念，然后通过例1（分别求下列各数的算术平方根）对算术平方根的概念加以巩固，得到算术平方根的性质：被开方数越大，对应的算术平方根也越大。教材又以2的算术平方根为例，研究它的存在性及大小。由于勾股定理在八年级才学，所以此处让学生用拼图的方法探究 $\sqrt{2}$ 的存在。教材中又用不等式逼近的方法，利用 $\sqrt{2}$ 的一系列不足近似值和过剩近似值来估计它的大小。

对教材整体把握后，执教教师确定了教学的重难点，引入了新的教学环节，并对教学内容进行了重组，引入“七巧板”激发学生兴趣，渗透数形结合思想；对知识顺序进行调整，先探究 $\sqrt{2}$ 的存在性，再引出算术平方根的概念，再探究 $\sqrt{2}$ 的大小，符合学生的认知习惯，为学生自主探索创造了一定条件。引入数轴，大概感知 $\sqrt{2}$ 的大小，学生进一步感知数形结合思想。对实际问题进行改编，引导学生从“求面积分别为 $\frac{4}{25}$, 0.36, 5的正方形的边长”推广到“面积为 a 的正方形边长为 x ”，进而引出了算术平方根的概念，更便于学生理解，也让学生体会到从特殊推广到一般的认知过程。

段老师对教材的灵活运用值得我们学习，教材是知识和思想的载体，教师在设计教学环节时，应认真梳理教材中的知识与思想，然后课标要求设计教学内容，必要时可进行适当重组或改编，让学生更容易理解知识的前因后果，循序渐进地理解数学思想的含义。

第4章 初中数学教学中渗透数学思想的策略研究

数学思想蕴含在数学知识中，伴随着知识的形成、发展和应用，学生需要在知识探索的全过程中感悟数学思想，本章将基于实习学校初中数学思想渗透现状，针对渗透过程中存在的问题，结合案例分析中的典型经验，以知识为主线提出在初中数学教学中渗透数学思想的策略。

4.1 课前准备——在知识的准备中把握数学思想

4.1.1 研读课标，定位思想渗透要求

课程标准是规范课程内容、保证教育质量的重要指导性文件，教材的编撰、教学的评估等都是基于课程标准进行的。有效研读课标，对于我们把握教育教学总体要求，指导实施教学活动，具有重要意义。

《课标（2011年版）》将数学基本思想写入基本理念，列为课程总目标中的“四基”之一，并在教学建议中提出了具体的要求：教师应利用数学思想与知识发展的密切联系，将数学思想融入到学生的探索环节中，让学生在积极参与课堂活动、思考知识来龙去脉的过程中感受思想的熏陶^[2]。

数学思想在课标中的位置举足轻重，这是将数学思想融入教学日常必要性的集中体现，一线教师应该认真反复研读课标，把握课程设计中对于数学思想的总体思路。由于课程标准是对整个学段的要求，有一定的高度和概括性，遇到无法理解或不知如何细化时，要借助相关专家学者对课程标准的解读，将渗透数学思想的要求落实到教学实施的每一环节中。

4.1.2 研究教材，深挖思想蕴含情况

调研表明，大部分教师对教材的阅读、理解，仅停留在知识层面，对涉及到的数学思想挖掘不到位。实际上，教材中除了以知识为线索，还蕴含了大量的数学思想，数学思想存在于知识形成、发展、运用的每个部分，例如运用类比联想有助于概念的迁移，借助化归思想化繁为简……这些都需要教师在教学之前认真研读教材，才能感悟到知识中蕴含的数学思想。为了帮助一线教师对数学思想进行整体的感知，笔者对初中数学中常见的数学思想进行了梳理，供读者参考。有了整体的感知后，教师在研读教材时，就可以及时对照思考，体会教材中蕴含的数学思想，并思考如何在教学设计中渗透，渗透到什么程度等问题。

《课标（2011年版）》中提出的数学“基本思想”指的是最根本、最基础的数学思想，其他的数学思想可由此衍生、发展出来。然而不论哪一种思想，其本质都源于抽象、推理、模型这三种最基本的数学思想。初中数学中蕴涵的数学思想主要有：符号与变元、数形结合、化归、特殊与一般、方程与函数、分类讨论、类比联想、数学建模、统计与概率。

1. 符号与变元思想

符号与变元思想是指将现实世界中的事物抽象到数学中，通过符号或变元表示出来，并加以研究以解决实际问题的思想。它贯穿于数学学科始终，应用非常广泛，早在小学五年级就开始了用字母表示数的学习，但学生的理解只停留在把数换成了字母，未能理解其中蕴涵的数学思想。中学开始对符号与变元思想进行了深入的学习，从用字母表示未知的量、数、代数式，到换元、设辅助元，再到参数方程（表示不定元）、函数等无不体现着符号与变元思想。符号与变元思想不仅是简单地用字母表示数或未知量，更是从数到代数、常量到变量的飞跃，如果没有符号与变元，变量也就无从谈起了。将未知的数学事实用符号化的语言来表示或替换，可以在不改变逻辑顺序的前提下，理清问题中的逻辑关系，有利于我们更快地解决问题。

中学教材中符号与变元思想的发展可以概括为以下四个时期：孕育期、萌芽期、发展期、应用期。

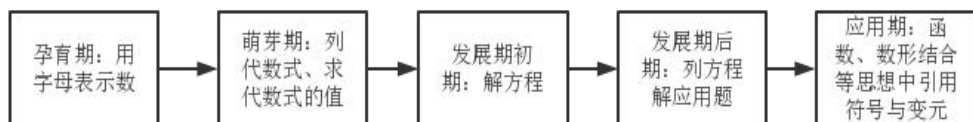


图 4-1 符号与变元思想发展阶段图

2. 数形结合思想

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学，为了研究方便，人们单独抽离出数量关系和空间形式，形成了代数与几何。数形结合思想就是在解决代数问题时，明确其内部隐藏的几何背景，启发思维，找到解决问题的途径；或者在研究几何图形时，注意从代数的角度，通过量关系的研究来解决问题。在现实世界中，几乎所有事物都同时反映了代数属性和几何属性，我们可以利用两者之间的联系，灵活转化数量与形状，使数量关系和空间形式结合起来，高效地解决问题。

（1）以形助数

数轴、直角坐标系是连接数与形非常重要的工具，将某些数或代数表达式在数轴、直角坐标系等图形工具中表示，通过几何图形，寻求解决问题的新路径。例如在求解不等式及不等式组时，在数轴上表示出解或解集，既能体现出在不加限制条件下解有无数个，同时很容易求出解的公共部分即为不等式组的解集。

例：不等式组 $\begin{cases} 2x-1 > x+1 \text{ ①} \\ x+8 \geq 4x-1 \text{ ②} \end{cases}$ 的解集为：_____

解：解不等式①得： $x > 2$ ，解不等式②得： $x \leq 3$ ；

将不等式①②的解集在数轴上表示为：

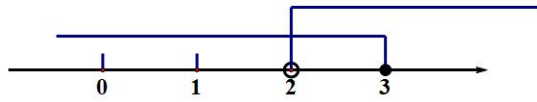


图 4-2 数轴表示图

故原不等式组的解集为 $2 < x \leq 3$ 。

由于初中学生抽象思维有限，认为很多概念定理晦涩难懂，如果能将形象的几何直观有机结合起来，就能帮助学生很容易理解。例如在学习完全平方公式时，如果能引入对应图形演示，一定会给学生留下深刻印象。

完全平方和的公式为： $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ，此时，我们借助对应图形的面积来表示。如图，绘制一个边长为 $a+b$ 的正方形，计算可得该正方形的面积为 $(a+b)^2$ ，通过分割，该正方形的面积也可表示为 $a^2 + b^2 + 2ab$ ，所以完全平方和的公式 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 成立。此时，再让学生通过类比，对完全平方差的公式推导应该就非常容易了。

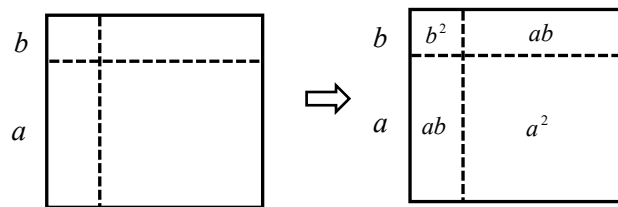


图 4-3 平方差公式推导辅助图

(2) 以数助形

在几何问题的研究中，往往也可以通过数量的计算帮助我们更加准确刻画几何图形的特征。主要有以下两种情况：

一是利用数轴、直角坐标系等工具将几何问题代数化；

二是通过计算几何图形的角度、长度、面积等几何量更加准确地刻画几何图形的特征。例如，证明直角可以利用勾股定理，计算角的大小可以借助三角函数，证明图形相似可以通过证明对应线段比例相等。

例：在正 $\triangle ABC$ 的三边 AB 、 BC 、 CA 上分别有 D 、 E 、 F 。若 $DE \perp BC$ ， $EF \perp AC$ ， $FD \perp AB$ 同时成立，求 D 点在 AB 上的位置。

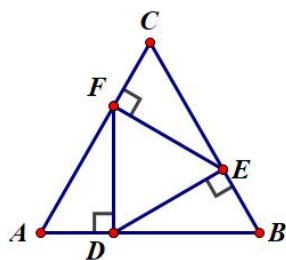


图 4-4 正三角形图

此题是求解几何图形中的点的位置的问题，但从图形上并不能找到解决问题的方法，此时结合正三角形和直角三角形的性质，得出了图形中某些边的数量关系，从而精确求出了 D 点所在的位置。求解过程如下：

解：

$$\because FD \perp AB$$

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ - \angle A = 30^\circ$$

$$\therefore AF = 2AD$$

$$\therefore \angle DFE = 90^\circ - \angle AFD = 60^\circ$$

$$\text{同理 } \angle FDE = 60^\circ, \angle DEF = 60^\circ$$

$\therefore \triangle DEF$ 为等边三角形

$$\therefore DF = EF = ED$$

在 $\triangle AFD$ 和 $\triangle BDE$ 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle B \\ \angle ADF = \angle BED \\ FD = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle BDE$$

$$\therefore AF = BD$$

$$\therefore BD = 2AD$$

$\therefore D$ 为线段 AB 的三等分点.

3. 化归思想

所谓化归思想，就是把应该解决的问题不改变原意，转化为别的容易解决的问题，通过解决新问题来寻求原题的解。利用化归思想，可将较为复杂的问题转化为较简单的问题；也可将还未掌握的新知识转化为已经学习过的知识；亦可将代数问题和几何问题相互转化。从这个角度来讲，数形结合、特殊与一般等思想都可以是它的应用。

化归思想几乎蕴涵在初中数学的每一个知识点中。代数方面，有理数的减法转化为加法，有理数的除法转化为乘法，方程的求解往往将高次化低次，多元化一元，无理化有理，分式化整式等等；几何方面，定理、公示的证明会用到转化思想，新的或复杂图形的学习同样会利用转化思想将其转化为已学过的或简单的图形，例如斜三角形问题一

般会通过作某一边上的高，将其转化为直角三角形，梯形问题会考虑作出两条高或者通过作某一条腰的平行线，将其转化为平行四边形或三角形等等。更为一般的，当我们学习每一个与前面知识相关联的新的知识点时，一般都会将其转化为已经习得的知识，完成了这一步新问题也就得到了解决。

化归思想应用的过程可用流程图表示如下：

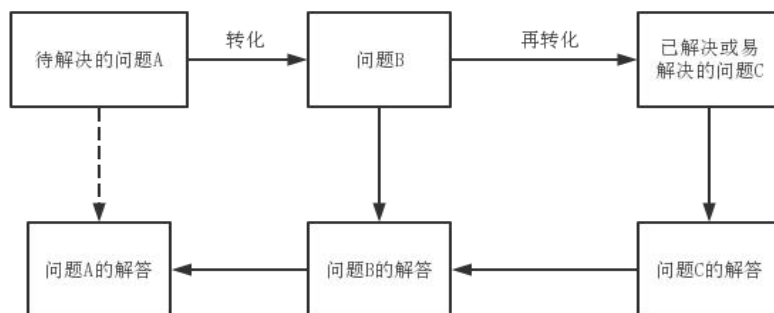


图 4-5 化归思想应用流程图

4.特殊与一般思想

从一般到特殊和从特殊到一般是认识客观世界的普遍规律。对于数学世界的探索，数学家们通常也使用特殊化和一般化这两种方法。

人在认知过程中习惯从更容易理解的具体事物开始，在数学研究中，面对复杂难以理解的问题时，通常会化繁为简，找到思路后再去解决复杂的问题。前半部分就是一般到特殊的过程，也叫特殊化。

将一般问题特殊化的方法大致分为两类：一是把问题简单化，当一个问题比较复杂看不清楚时，可以先把问题进行简化，这有助于我们找到问题的突破口。二是从特殊对象看问题，着眼极端情形（以某种数量达到极端值为对象，把数值的极端性质作为分析问题的出发点），考虑特殊对象（从具有其他特殊性质的对象入手考虑问题），考察上下界（考虑某种数值的上下界）。

人们为了探索更广泛的领域，获得更一般的结论，往往也需要将具体、特殊的事物加以推广，这就是从特殊到一般，也称一般化。对数学研究中具体、特殊的对象加以推广可以得到更为一般的结果，再根据其本质得到其他的性质。

一般化方法的应用有以下两方面：一是数学命题的推广，将数学命题中的某些特殊条件一般化，以得到更一般的结论，即数学命题的推广。二是通过一般化来解决问题，当一些特殊问题不易直接解决时，我们可以尝试把它一般化。若一般化后的问题易于解决，则原特殊问题也将相应地解决。

5.方程与函数思想

方程思想是借助方程来解决问题的一种思想。通过将未知数或未知量用字母来表示，然后利用题目中相等的量或同一种量的不同表示形式来构建方程，再通过解方程并验证

结果来得出原问题的解。利用方程思想可以将复杂问题变得简单化、逻辑化,相较于算术法解决问题,更容易理解。例如经典的鸡兔同笼问题,解法多样,有列表、算术、假设、方程法等。但由于方程法是直接利用题目中最容易发现的等量关系,从逻辑上来讲是正向思考的,相较算术法,理解起来更容易一点。

函数是用来描述两种及以上的变化量之间的关系,函数的性质有奇偶性、单调性、周期性、最值等。函数思想就是来利用函数的概念和性质等来分析解决问题的一种思想。函数思想反映了客观世界事物的相互变化、相互联系,是我们认识世界非常重要的工具之一。函数思想的应用也非常广泛,例如有关方程、不等式、最大(小)值、数列的前 n 项和公式等都可用函数思想来解决。

方程思想和函数思想实际上是建模思想的一部分,解决问题的关键就是找到题目中的等量关系或者变化量之间的关系,完成了这一步也就建立了相应的数学模型,然后只需将未知的量与已知的量带入即可。

例:用一根长400米的铁丝围成一个长方形(没有剩余且接头忽略不计),问长和宽分别为多少时,长方形的面积最大?

解答此题时,我们首先根据符号与变元思想将未知的三种量用符号表示出来,将长设为 x m,宽设为 y m,面积设为 S m^2 。由长方形周长公式可列二元一次方程为 $2(x+y)=400$,通过变形可得 $y=-x+200$,从变量的角度考虑 y 随 x 的增大而减小,是一个一次函数。由长方形的面积计算公式可知 $S=xy=x(-x+200)=-x^2+200x$,再根据利用函数求解最值的方法即可解决问题。

6.分类讨论思想

分类讨论思想是在数学逻辑思考中最常见的一种思想。当遇到无法整体研究的问题时,往往根据一定标准将该问题分成几类,化整为零,并对这几类逐个研究,积零为整,得出结果后再整合出整个问题的结论,使问题得到顺利解决。分类讨论需注意三点:一是要明确分类对象;二是分类标准必须统一;三是分类要不重不漏,当需逐级分类时一定不能越级。

分类讨论思想在初中数学中应用广泛,主要可分为以下几种类型:

(1)对数学概念的认识或计算时需要分类。如有关绝对值的认识与计算需要进行正负分类;

(2)某些含参变量引起的分类,例如关于 x 的方程 $(a+2)x^2+3x+5=0$ 的值有解,其中二次项的系数 $a+2$ 的值不确定,需要分一元一次方程和一元二次方程来讨论;

(3)已知几何图形的某一部分要素,由于图形形状的不确定性,需要分类讨论找出图形的所有可能;

(4)题目中含有开放性要求,或本身就需要分类讨论的。例如在下列方程中,任

选两个组成方程组并求解,写出所有可能的结果;再如求解何种方案花费最经济等问题。

7. 类比联想思想

类比联想思想是根据某两个或几个研究对象具有几个相同的性质,推测在其它方面也可能存在相同或相似特性的合情推理的方法。其结果是非必然的,是否正确需要进行严格的证明,是一种由特殊到特殊的推导。类比联想思想有助于学生创造性思维的培养,也有助于学生对新知的探索。学生通过类比联想将新旧知识点联系起来,以熟知和习惯的思维作为铺垫,自主进行知识的构建,在探索新知识的这一过程中,学生对类比联想思想的领悟加深,遇到新的问题时学生的思路也会被打开,久而久之,学生的创造性思维受到潜移默化的影响。

初中数学中的很多概念、定理、公式的证明经常会用到类比联想思想。在学习新知识的过程中,恰当地与旧知识对比联系,一来可以巩固旧的知识,二来可以模仿旧知识的性质以及探究方法来学习新知识。虽然结论不具有必然性,但这种举一反三、探索创新、质疑证明的数学思维对学习者的裨益。例如在学习三元一次方程组时,学生可以很容易联想到类比二元一次方程组的解法,通过消元最终转化成一元一次方程组来求解。又如一元一次不等式组的学习,可以类比一元一次方程组的解法,无非是将相等关系变成了不等关系,只需注意不等号的变化即可。再如三角形相似判定的学习,可以类比三角形全等的条件,推导并证明出三角形相似的条件。

8. 数学建模思想

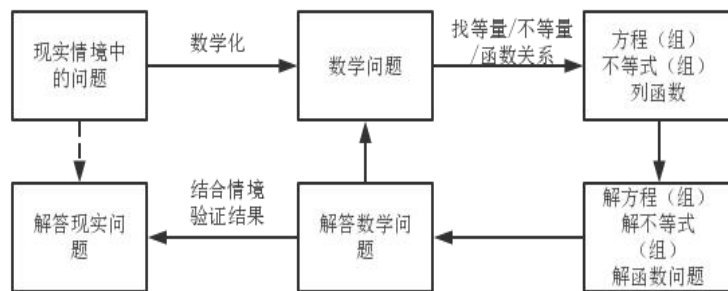


图 4-6 数学建模思想流程图

数学建模思想就是通过提炼和抽取问题的信息,用数学语言来描述的思想。数学模型可以是中学中的一切公式、公理、图像、法则及函数等。

初中数学中常见的模型有:方程(组)、函数和不等式(组)。方程(组)模型和函数模型前面已经进行了详细介绍,不等式(组)模型可类比方程(组)模型,只是不等式(组)中的数量关系为不等关系,通常解决多个固定解的问题。这三种模型都是将实际情境中的问题转化为数学语言,从而使问题得以解决。一种数学模型往往可以解决一类实际情境的问题。

9. 统计与概率思想

随机现象有两个基本特征：一是结果的随机性，即重复同样的试验，结果不相同，因此实验结果在实验之前不能预料，这就是偶然（或然），二是频率的稳定性，即在大量重复实验中，每个实验结果发生的频率稳定在一个常数附近，这就是必然。概率所研究随机现象的过程就是在偶然中找必然，再用必然规律解决偶然的问题，这其中蕴含的数学思想就是统计与概率思想。例如在掷硬币实验的学习中，通过实验发现每个小组的实验结果不尽相同体现了或然性，而大量重复实验频率稳定在概率附近则体现了必然性。统计与概率思想在中学教学中有广泛的应用，如：等可能事件的概率、互斥事件有一个发生的概率、相互独立事件同时发生的概率等。

4.1.3 教研活动，探讨思想渗透策略

教研活动，是教师提高自身专业素养和教学质量的有效途径。调研发现，教师的教研活动基本每周一次，但议题多是类似如何让学生掌握某个知识点，如何突破某个难点的问题，即使有关于提升学生数学素养的问题，也都是网上找点资料，为了完成任务，几乎不会涉及到数学思想的探究。这就导致了教师对数学思想认识的模糊不清，对渗透数学思想的方法不甚了解，对教学中渗透数学思想还存在许多困惑。

想要改变这种状况，教师必须开展关于渗透数学思想的有效教研活动。共同学习课程标准，把握思想渗透总体要求；一起研究解读教材，了解教材中关于数学思想的总体框架，领会教材编排意图；一起分享学习感悟，互相解答产生的困惑；共同参与教学设计，合力研究将数学思想渗透与知识教学融合起来；阶段性总结渗透数学思想成果、困惑等。通过这些活动，教师的教学理念得以更新，专业素养能够得到进一步提升，素质育人理念方能进一步落实。

4.1.4 制定目标，明确思想渗透程度

教师完成对教材的研读后，应着力思考如何利用教材将数学思想融入到教学的具体环节中去。而渗透在哪里，如何渗透，渗透到什么程度则是需要首先考虑的事情。这也就需要教师制定明确的教学目标，清楚通过何种途径在哪一过程渗透哪些数学思想。那应该如何制定思想渗透目标呢？

数学思想的渗透应该是一个循序渐进的过程，不是通过一节课或几节课来实现所有思想的渗透，而是伴随着知识产生、发展、应用的过程而不断深入的，而且对于不同程度、不同阶段的学生要求也各不相同。课标中认知领域的教学目标有三个层次“了解——理解——掌握、熟练运用”，对于数学思想而言，对应到教师和学生层面也有相应的目标层次，如表 4-1 所示。

表 4-1 数学思想目标层次对应表

层次	主体目标（学生）	教学目标（教师）	认知领域的 教学目标（课程标准）
A	感受、觉察	渗透	了解
B	领悟、形成	显化	理解
C	掌握、运用、内化	运用	掌握、灵活运用

制定渗透数学思想的教学目标需要根据知识发展的过程，根据学生对该思想的掌握程度，教师在教学中渗透数学思想，学生初步感受思想；当经过不断地渗透，学生对某一思想有了一定的认识后，教师将数学思想显化，引导学生领悟思想的本质，帮助学生形成该思想的概念；当学生对该思想足够内化吸收后，教师引导学生运用数学思想解决问题。教学目标的制定也应该遵循以上思想的认知过程。

4.1.5 精心设计，融入思想渗透环节

完成目标的制定，教学设计中就需要对目标及教学重难点进行分解，在教学的各环节中巧妙设计，将数学思想融入教学环节中，这既是对理念和目标的落实，同时也解决了教师认为渗透数学思想浪费时间的困惑。将数学思想与教学设计深度融合，需要教师在考虑教会学生基础知识和基本技能的同时，多思考让学生体会知识产生、发展的过程，这一过程无形中就对数学思想进行了渗透。在设计时，需要整体把握学生的认知习惯，以知识为明线，思想为暗线，让学生在习得知识的同时，逐步感悟数学思想。

4.2 课堂教学——在知识形成、发展、应用中渗透数学思想

课堂教学是数学思想渗透的主阵地，在课堂学习过程中，数学思想作为暗线蕴藏在知识背后，教师应该让学生在知识探索的过程中，逐步感悟数学思想。在这一过程中，教师既不能将数学思想简单当做一个知识点来讲，也不能“贴标签”式地讲解，通过外显的语言点明数学思想的内涵和用途，这样单纯的理解显然是将知识内容与思想方法分离，学生并不能得到内化吸收，自然也达不到掌握运用的水平。数学知识和思想方法不是“两张皮”，教师在教学中需要将两者有机融合，让学生在动手操作、独立思考、合作探究、分类辨析、归纳总结的知识探究过程中，感悟数学思想，体会数学思想伴随知识探索的深入不断升华。

4.2.1 在概念引入中感悟数学思想

数学概念是客观世界中的数与形及其特有属性在思维中的反映，它由准确而精炼的数学的数学语言给出，具有高度的抽象性，是学生学习数学思维的核心。人们主要通过概念的形成和同化两种形式来学习概念。

从大量的同类事物的不同例证中独立发现同类事物的共同属性，这种习得概念的方法叫概念形成。例如，在上一章节案例2中，算术平方根的概念讲解中，先求比较特殊的面积是完全平方数的正方形的边长，学生很容易求出，再求面积是非完全平方数的正方形的边长，此时自然抽象出算术平方根的概念、形式。为了进一步理解算术平方根的非负性，又举出了被开方数是0和-1的否定例证，这个过程就是从特殊推广到一般，再从一般到具体情形的体现。

学生从原有认知中找到和给出概念相关的知识来习得新概念的方式叫概念同化。例如在教学“分式”概念时，教师可以先给出分式的定义，然后引导学生类比小学时“分数”的知识，将两者的形式、性质等一一比较。此处运用类比联想的思想，有助于重难点的突破，促进学生对分式概念认知结构的建立。

4.2.2 在知识探索中渗透数学思想

数学思想蕴涵在数学知识中，数学思想在知识的产生和发展中有着非常重要的作用。教师不能将渗透数学思想理解为用显化的语言点明数学思想的定义和用途，而应该注重知识的产生、发展的过程，改变以往直接给出概念、公式、定理的习惯，以学生为主体，引导学生探索知识的产生、发展，使学生明白概念、公式、定理是怎么推导出来的，有什么用途，教师要将数学思想与知识探索有机融合，结合有的放矢、循序渐进的知识探索过程，让学生在自主探究、合作交流、分类辨析的过程中，循序渐进地感悟数学思想，掌握数学思想的本质及用途。

例如，上一章节案例1《正比例函数》的教学中，教师并没有直接给出正比例函数的定义，而是引导学生一步步探究，让知识自然生成。首先引导学生从实际生活中抽象出数学问题，发现变量间的关系，列出不同的函数解析式，建立函数模型；通过对不同函数解析式的观察、分类，类比其他模型的研究方法，决定从最特殊的函数入手研究，渗透特殊到一般的数学思想；从定义、图象、性质三方面入手，研究正比例函数特征，渗透数形结合思想。学生在教师的引导下，自主完成函数模型的建构，在观察、比较、分类、抽象、归纳的过程中，探究得到了正比例函数的定义、性质，感悟到了数学思想在其中的重要作用。

4.2.3 在问题解决中应用数学思想

问题是数学的心脏，培养学生解决问题的能力是数学学科一个重要目标。在培养学生解题能力的路上，教师们的教学方法各不相同，但有一个现象非常普遍：学生经历了大量的题海战术，教师对解题的技巧也进行了大量的讲解，但学生遇到新的问题总会找不到解决的办法。这就是因为教师在问题解决教学中只注重题型、方法和技巧的教学，而忽略了解题思路的梳理，忽视了数学思想在解决问题中的统摄作用。

教师要想提升学生的解题能力，需要抓住问题的本质，发挥学生的主体作用，注重学生在做题前解题思路的梳理，让学生的思考过程充分暴露，引导学生进行深层次的思考，调动脑海中感悟到的数学思想，充分发挥数学思想在解决问题中的重要作用。解题完成后，还需要再次梳理解题思维过程，及时总结提炼题目中涉及到的思想方法，以此来达到解一题，通一类的目的。

4.2.4 在总结反思中升华数学思想

由于一节课需要学生掌握的知识和思想有很多，教师应该在每节课结束前预留几分钟的时间让学生归纳概括。但由于学生对数学思想理解不够深刻，很少有学生谈及有关数学思想的收获，教师也只是对当堂课的知识进行简单梳理，未曾谈及数学思想。人教版教材中的单元小结部分不仅会梳理本单元的知识，同时还会对涉及到的思想方法进行总结，在总结中让知识得到巩固，思想得到升华。

教材的编排将数学思想融入到数学知识中，一节课或一阶段的学习后有必要对数学思想进行小结，尤其是同一知识内容中涉及多个数学思想，或者一种数学思想可以分布在不同的知识点中。而由于学生对数学思想的掌握不是一蹴而就的，所以在初步了解阶段的小结时，只需梳理数学思想与知识间的联系，让学生产生对数学思想的初步印象，等待时机成熟，经过量的积累引起质的飞跃时，再将数学思想显化，归纳概括数学思想的本质，便于学生对该思想进一步的掌握运用。因此，时机成熟后，教师要通过课堂小结、单元小结、期末复习等环节系统地对数学思想进行归纳总结，提升学生对数学思想的认知程度，让学生进一步体会数学思想与知识发展间的联系，进而优化学生的思维品质。

4.3 课后反思——在知识教学的改进中体悟数学思想

4.3.1 改变观念，数学思想促成长

尽管“基本思想”写入《课标（2011年版）》已有十年，然而在初中数学中渗透数

学思想的现状却不容乐观,仍然存在很多问题。究其原因,是教师对传统教学理念根深蒂固,仍然将“基础知识”和“基本技能”作为自己唯一的教学任务。虽然也在提“素质教育”、“数学思想”,但多停留在“喊口号”阶段,并未进行有效的相关教学研究,对数学思想的认知不够,缺乏策略,教学中渗透数学思想浮于表面。

数学思想是数学学科的灵魂,是当数学知识忘却唯一留存在脑海中的东西,会影响人一生思维品质的形成。教师要在教学中有效渗透数学思想,帮助学生建立起知识间的内在联系,让学生在理解的基础上灵活运用数学思想,进而形成良好的思维品质,实现立德树人的育人目标。因此,教师必须改变已有的、陈旧的教学理念,将素质教育落到实处,将数学思想渗透到日常教学中,这不仅关乎学生数学学习能力的提高,更影响学生一生的思维品质。

4.3.2 技术融合,多方途径助探索

长期以来,由于数学本身的抽象性,数学学习需要大量思考,学生容易出现对数学学习缺乏信心,对数学知识探索缺乏兴趣。而数学思想的感悟正需要学生从知识探索的过程中习得,所以教师需要调动多方途径,吸引学生探索数学的兴趣。

在时代飞速发展的今天,信息技术以其特有的属性已成为课堂教学中必不可少的一部分。利用现代信息技术手段,可以将数学知识化静为动,化复杂为简单,化抽象为具体。将信息技术融入到数学思想的渗透中,有利于活跃课堂教学氛围,激发学生学习兴趣,提高课堂效率,帮助学生高效探索数学知识,感悟数学思想。例如,利用多媒体课件幻灯片演示,可以将抽象、复杂的图形形象直观的展示出来,培养学生抽象思维;利用几何画板软件,可以精准、迅速制图,轻松进行数学实验,助力学生掌握数形结合、函数等思想;利用计算机强大的计算功能,进行复杂的数值计算,有利于概念从特殊到一般的推广。因此,教师要充分利用信息技术手段,让数学思想的渗透更具趣味性、高效性,事半功倍地完成教学任务。但同时也需注意信息技术只是辅助手段,要注意把握尺度,不能盲目追求形式而舍本逐末,重点还是要让学生探索中感悟数学思想。

4.3.3 不断激励,多元评价促完善

教师对数学思想的渗透需要做到循序渐进,学生对数学思想的感悟同样也不是一蹴而就的,由于认知水平、兴趣爱好、思维方式等方面的差异,不同的学生面对相同的数学思想理解的程度是各不相同的,有的学生已经会利用数学思想分析解决问题了,而有的学生还停留在只了解数学思想的定义。面对这样的情形,教师切不可直接让学生记忆数学思想的用法。

通过数学学习要培养学生学会用数学的眼光看世界,用数学的思维思考世界,用数

学的语言表达世界。教学中渗透数学思想的目的，不是为了让学生记住背会数学思想的定义及用途。面对不同学生的接受程度不同，教师不能急于求成，要多元评价学生对数学思想的掌握，同时还要保持足够的信心，通过不断地反复渗透一定会达到效果。

第5章 研究结论与展望

5.1 研究结论

数学思想是数学学科发生发展的根本，也是数学学科育人的最终目标。本文主要研究初中数学思想渗透的现状和策略，为了达成研究目标，首先，笔者对相关文献、课标、教材及相关理论的梳理为本研究奠定了坚实的理论基础。随后，笔者通过对实习学校学生问卷、教师访谈调查得到初中数学思想渗透的现状，梳理出存在的问题。主要有教师对课标教材研读较少，缺乏理论指导，也不会进行有关数学思想方面的教研活动，导致教师对数学思想的认知有待提高，不知该用什么样的策略渗透数学思想，不知该怎样平衡知识讲解和数学思想渗透时间上的关系。教师对数学思想的渗透浮于表面，只是“贴标签”式地点明数学思想的定义、用途。对问题解决的讲解简单认为是“题型+技巧”，而忽视数学思想在知识形成、发展中的作用。教师对渗透数学思想的策略不甚了解，更注重“双基”的教学，无暇渗透思想。导致学生学习目的狭隘，以考试得高分为目的，不去主动探索数学思想，更没有应用数学思想解决问题的意识。

因此，针对上述发现的问题，结合案例分析结果，笔者给出了初中数学思想渗透的策略。数学思想的渗透贯穿于知识从产生到发展运用的全过程，在课前准备阶段，教师要研读课标，定位思想渗透要求；研究教材，深挖思想蕴含情况；教研活动，探讨思想渗透策略；制定目标，明确思想渗透程度；精心设计，融入思想渗透环节。在课堂教学阶段，教师要引导学生在概念引入中感悟数学思想；在知识探索中渗透数学思想；在问题解决中应用数学思想；在课堂小结中升华数学思想。在课后反思阶段，教师要改变观念，数学思想促成长；技术融合，多方途径助探索；不断激励，多元评价促完善。教师要把握数学思想与知识发生、发展的关系，注重学生的认知发展规律，循序渐进，螺旋上升，让学生在知识探索过程中真正感悟数学思想。

5.2 研究不足与展望

5.2.1 研究不足

1.由于时间和实习学校的限制，本次问卷调查和访谈调查的样本容量偏小，使得本研究中数学思想渗透的现状和存在的问题缺少一定说服力；

2.由于教学经验不足和时间有限，提出的策略未能在教学中实践，使得本研究提出的策略还需进一步完善。

5.2.2 研究展望

在今后的工作学习中，我将尽可能提高调查的样本容量，扩大调查范围，更全面了解初中数学教学中渗透数学思想的现状；我将更广泛地收集相关资料，参与相应的教学研究活动，将策略应用到教学实践中，对数学思想渗透的策略进一步修改完善。

参考文献

- [1]郑义富.关于数学精神、数学思想与数学素养的辨析[J].课程.教材.教法,2021,41(07):112-118.
- [2]中华人民共和国教育部.全日制义务教育数学课程标准[S].北京:北京师范大学出版社,2011.
- [3]史宁中.注重“过程”中的教育——《义务教育数学课程标准》修订的若干思考[J].人民教育,2012,63(07):32-37.
- [4]史宁中,孔凡哲.“数学教师的素养”对话录[J].人民教育,2008,59(21):43-49.
- [5]孔凡哲,严家丽.基本思想在数学教科书中的呈现形式的研究[C].北京师范大学首届华人数学教育会议论文集.北京:北京师范大学基础教育课程研究中心,2014:316-318.
- [6]史宁中.漫谈数学的基本思想[J].数学教育学报,2011,20(04):8.
- [7]顾沛.数学基础教育中的“双基”如何发展为“四基”[J].数学教育学报,2012,21(01):14-16.
- [8]张奠宙,过伯祥.数学方法论稿[M].上海:上海教育出版社,1993.
- [9]曹才翰,章建跃著.数学教育心理学[M].北京:北京师范大学出版社,2006.
- [10]臧雷,单宝珍,孙朝仁,等.“发展学生数学思想,提高学生数学素养”教学实验研究报告[J].课程.教材.教法,1997,17(08):36-40.
- [11]董磊.初中数学主要思想方法的内涵及层次结构[J].中学数学教学参考,2018,47(26):67-70.
- [12]蔡上鹤.数学思想和数学方法[J].中学数学,1997,19(09):1-4.
- [13]傅海伦.数学课程与教学论[M].济南:济南出版社,2019.
- [14]王燕荣.数学方法论[M].成都:西南交通大学出版社,2018.
- [15]杜晓新,冯震.元认知与学习策略[M].北京:人民教育出版社,1999.
- [16]董磊.数学思想方法的价值和意义[J].中学数学教学参考,2018,47(29):46-48.
- [17]王兴国.略论数学思想方法学习的几个问题[J].教学与管理,2009,26(33):78-80.
- [18][美]G·波利亚.怎样解题:数学思维的新方法[M].涂泓,冯承天,译.上海:上海科技教育出版社,2007.
- [19][美]G·波利亚.数学的发现:对解题的理解、研究和讲授[M].欧阳绛,译.北京:科学出版社,1982.
- [20][美]G·波利亚.数学与猜想:数学中的归纳和类比;合情推理模式[M].李心灿,王日爽,译.北京:科学出版社,1984.
- [21]燕学敏,华国栋.国内外关于现代数学思想方法的研究综述与启示[J].数学教育学报,2008,17(03):84-87.

- [22][苏]亚历山大洛夫.数学-它的内容、方法和意义[M].孙小礼,译.北京:科学出版社,1958.
- [23][日]米山国藏.数学的精神、思想和方法[M].毛正中,吴素华,译.成都:四川教育出版社,1986.
- [24][美]M·克莱因.古今数学思想(第1册)[M].张理京,张锦炎,译.上海:上海科学出版社,1979.
- [25][苏]弗利德曼.中小学数学教学心理学原理[M].陈心五,译.北京:北京师范大学出版社,1987:21.
- [26]徐利治.数学方法论选讲[M].武汉:华中工学院出版社,1983.
- [27]徐利治.徐利治论数学方法学[M].济南:山东教育出版社,2001.
- [28]郑毓信.数学方法论入门[M].杭州:浙江教育出版社,1985.
- [29]郑毓信.数学方法论的理论与实践[M].南宁:广西教育出版社,2009.
- [30]郑毓信.数学思想、数学思想方法与数学方法论[J].科学技术与辩证法,1993,10(05):1-6+68.
- [31]王仲春,李元中,顾莉蕾,等.数学思维与数学方法论[M].北京:高等教育出版社,1989.
- [32]史宁中.漫谈数学的基本思想[J].中国大学教学,2011,33(07):9-11.
- [33]吴增生.数学思想方法及其教学策略初探[J].数学教育学报,2014,23(03):11-15.
- [34]毛莉莉.初中数学教学渗透“思想方法”的策略[J].数学教学通讯,2020,42(14):73-74.
- [35]卞家海.核心素养背景下的初中数学思想方法的教学实践[J].数学教学通讯,2020,42(20):34-35.
- [36]石志群.对数学思想方法教学现状的思考[J].数学通讯,2012,80(22):1-6.
- [37]高望祖.初中数学教学中渗透数学思想方法的现状调查研究[D].兰州:西北师范大学,2018.
- [38]杨庆芬.中学数学的思想方法的现状分析及思考[D].长沙:湖南师范大学,2019.
- [39]付军.初中数学教学渗透数学思想的策略[J].中学教学参考,2020,12(26):11-12.
- [40]徐杰.数学教学中渗透数学思想方法的教学策略[J].数学教学通讯,2019,41(26):71-72.
- [41]蒋美林.课堂教学渗透数学思想方法的意义与实践策略[J].数学教学通讯,2017,39(29):56-58.
- [42]汪小燕.七年级数学教学中渗透数学思想方法策略初探[J].中学数学研究(华南师范大学版),2018,64(02):36-37+4.
- [43]俞晓陆.浅谈数学思想方法在课堂中的高效渗透[J].数学教学通讯,2019,41(32):54-55.

- [44]张琳.初中数学思想方法在教学中的渗透[J].中学数学教学参考,2019,48(18):2.
- [45]李旭丽.高中数学思想方法教学现状的调查研究[D].临汾:山西师范大学,2018.
- [46]赵永.初中数学思想方法在拉萨市数学教学中的应用现状及对策研究[D].拉萨:西藏大学,2014.
- [47]中国教育学会中学数学教学专业委员会.第十二届初中青年数学教师课例展示活动[EB/OL].(2021-12-10)[2022-01-05].<http://live.yanxiu.com/lv/page/program/f3be2d0b084b3235/view>
- [48]中国教育学会中学数学教学专业委员会.第十一届初中青年数学教师优秀课展示与培训活动[EB/OL].(2019-12-09)[2022-01-05].<http://live.yanxiu.com/lv/page/program/a10577cef3af5cd0/view>

附录A 初中数学思想调查问卷（学生问卷）

亲爱的同学，你好，非常感谢你参与本次调查。本次调查的目的是为了对“初中数学思想”的学习情况进行调查，本次结果仅用于课题研究，问卷采取匿名方式，不会对你和老师产生任何影响。请根据实际情况回答问卷内容。感谢你的配合！

问卷部分

- 1、你对数学感兴趣（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 2、你对数学的探索研究感兴趣（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 3、在做题时，你经常会用数学思想来分析和解决问题（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 4、你觉得数学思想能开阔你解题时的思路（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 5、在复习课堂的基础知识巩固环节，你的数学老师会用数学思想将学过的知识串联起来（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 6、在新知识的探究与学习环节中，你的数学老师会用数学思想组织教学（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 7、在例题讲解环节中，你的老师会重视所学数学思想的应用与拓展训练（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 8、在进行课堂小结时，你的数学老师会将课堂中涉及到的数学思想总结与归类（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 9、在考试前的复习和考完后的讲评环节中，你的数学老师会重视数学思想的回顾与应用（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 10、在课后辅导你解题时，你的数学老师会分析题目中涉及到的数学思想，引导你应用数学思想思考并解决问题（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 11、在做题的过程中遇到难题没有思路的时候，你会用学过的数学思想分析问题（ ）
A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合
- 12、在解完题后，你会主动回想总结解题过程中用到的数学思想（ ）

A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合

13、你能掌握方程与函数、数形结合、分类讨论、类比等数学思想（ ）

A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合

14、在独立求解问题后，绝大多数时候你都能说出在解题过程中用到的数学思想（ ）

A.完全不符合 B.不太符合 C.不确定 D.比较符合 E.完全符合

测试部分

15-20 题考察大家对数学思想的掌握情况，请将你认为正确的数学思想的选项填入相应的括号内。

A.符号与变元思想 B.数形结合思想 C.分类讨论思想 D.转化思想

E.方程与函数思想 G.特殊与一般思想 F.类比联想思想 H.数学建模思想

15、三角形按角分类可分为钝角三角形、锐角三角形、直角三角形，反映的数学思想是：（ ）

16、借助画线段图的方式来帮助我们理解题意，体现的数学思想是：（ ）

17、学习三角形相似时可以对照三角形全等，体现的数学思想是：（ ）

18、当学习有理数的除法时，我们会将其化为有理数的乘法计算，体现的数学思想是：（ ）

19、学习正多边形时，我们从正三角形开始，到正方形，逐步推广到正 n 边形，体现的数学思想是：（ ）

20、对于鸡兔同笼问题，我们可以通过设未知数，找等量关系并列方程解决问题，这体现的数学思想是：（ ）、（ ）和（ ）

以上为问卷的所有内容，感谢你的配合，祝你学习顺利！

附录B 初中数学思想访谈提纲（教师访谈）

年龄：_____ 教龄：_____ 教授数学年限：_____ 年

- 1、初中数学中涉及到的数学思想有哪些？您认为数学思想重要吗？
- 2、您认为有必要在教学中渗透数学思想吗？为什么？
- 3、您在日常教学中经常会渗透数学思想吗？一般是以什么样的形式渗透的？效果怎么样？
- 4、您认为在初中数学中渗透数学思想有哪些障碍？
- 5、您认为在初中数学中渗透数学思想还存在什么问题和困惑？

附录C 《正比例函数》的教学案例

一、教学目标

(1) 理解正比例函数的概念，能判断两个变量之间的关系是否为正比例函数关系，能根据已知条件确定正比例函数的表达式。

(2) 经历观察、比较、分析、分类、抽象、归纳的认识正比例函数概念的过程，为进一步学习其他函数积累经验。

(3) 感受函数知识间的内在联系，初步体会函数研究的一般思路与方法。

二、教学重点

理解正比例函数的概念，初步体会函数研究的一般思路与方法。

三、教学难点

正比例函数概念的抽象概括过程。

四、教学过程（课堂实录）

1.复习回顾，预见新知

师：函数是解决问题的模型，请问我们已经学习了函数的哪些知识呢？

生：我们学习了函数的定义和列表法、图象法和解析式法三种表示方法。

师：非常好，接下来我们又将学习函数的哪些内容呢？其实我们之前也学习过解决问题的模型，比如有？

生：方程和不等式模型。

师：非常好，还记得我们先学习的是哪类方程和不等式吗？

生：一元一次方程和一元一次不等式。

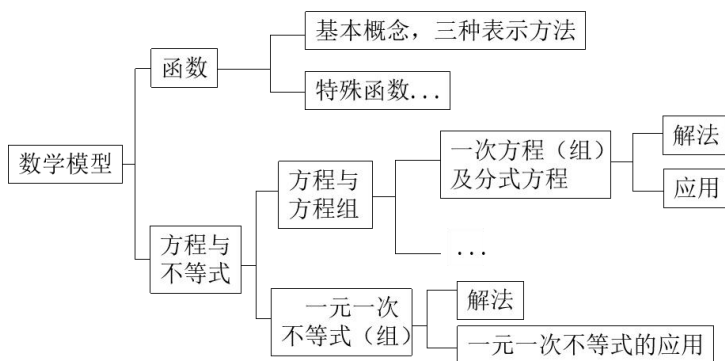


图 C-1

师：很好。我们都是从这些模型中的特例开始研究的，那么对于函数我们也将遵循这样的学习路径，从特殊的函数开始学习。

2.创境列式，自主经历

师：接下来让我们乘坐京沪高铁，继续我们的函数之旅。

问题 1 京沪高铁自 2011 年至今已开通运营十周年，累计发送旅客 13 亿人次，京沪高铁全长 1318 km。设列车的平均速度为 300 km/h。考虑以下问题：

师：在京沪高铁列车行驶过程中，涉及到哪些量？

生：涉及到速度、总路程还有时间。

师：很好，还有吗？

生：还有行驶的路程和剩余路程。

师：非常好，哪些是常量，哪些量是变量？

生：总路程和速度是常量，时间、行驶路程、剩余路程都是变量。

师：非常好，哪两个变量间是函数关系？

生：行驶的路程和时间是函数关系。

师：还有吗？

生：剩下的路程和时间也是函数关系，还有剩下的路程和行驶的路程也是函数关系。

师：非常好，如果把它们分别表示为 t （时间）， y （行驶的路程）， Z （剩下的路程），我们试着用解析式来表示它们之间的函数关系吧！

生 1: $y = 300t$

生 2: $Z = 1318 - 300t$

生 3: $Z = 1318 - y$

师：中国正在研发超级高铁，届时高铁速度将更快，京沪间的通行时间将更短。超级高铁列车驶完全程所需时间 t （单位： h ）与行驶速度 v （单位： km/h ）之间的数量关系应该怎么表示？

生: $t = \frac{1318}{v}$

师：对于同一问题，当我们选择的常量变量不同时，列出的函数解析式也不同，在下面的问题中列出的函数解析式是怎样的呢？请同学们独立思考，完成练习 1。

练习 1. 列式表示下列问题中变量之间的函数关系。

(1) 圆的周长 l 随半径 r 的变化而变化。

(2) 正方形的面积 S 随边长 x 的变化而变化。

(3) 铁的密度为 $7.9 g/cm^3$, 铁块的质量 m （单位： g ）随它的体积 V （单位： cm^3 ）的变化而变化。

(4) 冷冻一个 $0^\circ C$ 的物体，使它每分钟下降 $2^\circ C$ ，物体的温度 T （单位： $^\circ C$ ）随冷冻时间 t （单位： min ）的变化而变化。

师：谁来分享一下。

生：(1) $l = 2\pi r$ (2) $S = x^2$ (3) $m = 7.9V$ (4) $T = -2t$

师：这样我们就从丰富的问题中列出了函数解析式，这个过程我们称作是建立函数

模型。

3.互助探究，归类分析

$$\begin{array}{cccc}
 S = x^2 & y = 300t & Z = 1318 - 300t & l = 2\pi r \\
 t = \frac{1318}{v} & m = 7.9V & T = -2t & Z = 1318 - y
 \end{array}$$

师：观察上面列出的函数解析式，你能试着给它们分类吗？你的分类依据是什么？并试着给每一类函数起一个名字。请同学们独立思考后与组员交流讨论，最后选出一名代表上台展示。

.....

师：大家都有自己的收获，下面我们一起来展示一下。

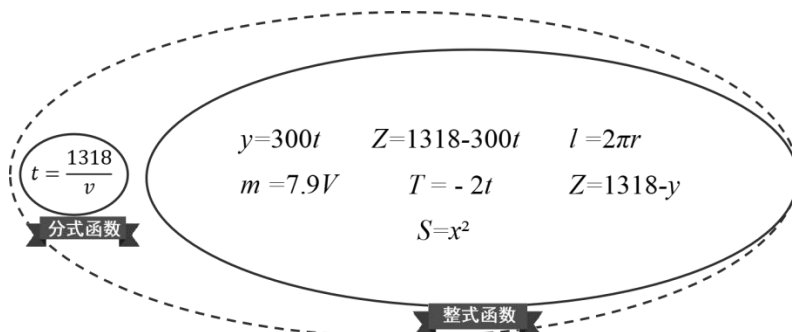


图 C-2

生：我们小组分为两类，我们的分类依据是，等号右边是分式和等号右边是整式，我们将第一类取名为分式函数，第二类取名为整式函数。

师：这一小组思路很清晰，还有不同的分类方法吗？

生 1：我们分为两类，分类依据是等号右边是多项式还是单项式，我们取的名字是多项式函数和单项式函数。

生 2：我们认为 $t = \frac{1318}{v}$ 应该再分为一类，因为它的等号右边是分式，并不是单项式，我们把这类函数称为分式函数。

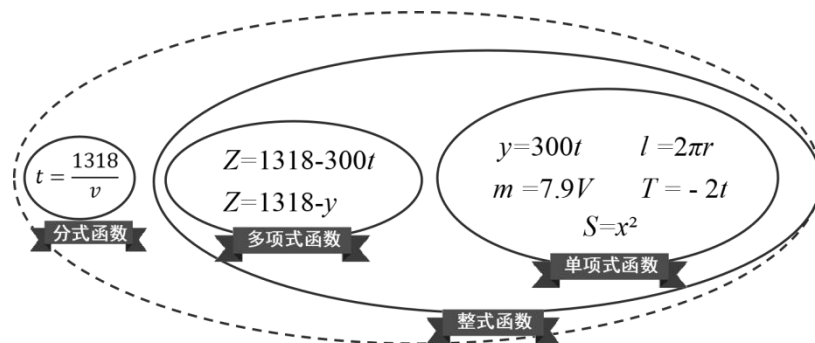


图 C-3

师：那它的等号右边究竟是不是单项式呢？

生：单项式和多项式统称为整式，因为它是分式，所以它不是单项式。

师：非常好，那第二种分类方法和第一种分类方法有什么联系呢？

生：第二种是在第一种分类的基础上，把整式函数分为了多项式函数和单项式函数。

师：还有没有其他不同的分类方法？

生 1：我们小组分为两类，依据是自变量次数为 2 的和自变量次数为 1 的。我们把第一类函数叫做二次函数，把第二类函数叫做一次函数。

生 2：我们小组认为 $t = \frac{1318}{v}$ 应该再分为一类，因为它的自变量次数为 -1，它是分式函数。

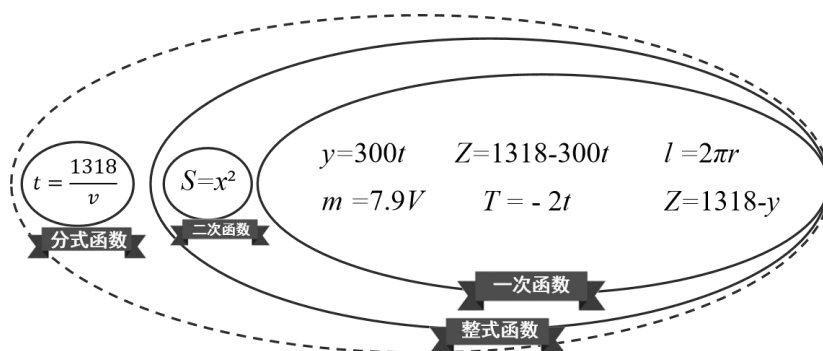


图 C-4

师：大家太棒了，那大家想一想这种分类方法和第一种分类方法有什么联系？

生：在第一种的基础上，把整式函数细化为二次函数和一次函数。

师：归纳的非常好，我们想想，这三种分类方法都是先怎么分？

生：都是先分成整式函数和分式函数。

师：非常好，那我们回忆一下学习式的顺序，是先学习……整式，后学习……分式。那么对于函数我们也先学习整式函数，在整式函数里面再怎么分类更好呢？我们可以回忆一下方程的学习，再怎么分类和我们的方程学习经验更一致呢？

生：方程是按照自变量的次数分类的，所以把它分成一次函数和二次函数更好。

师：非常好，在整式函数中根据自变量的次数分为一次函数和二次函数，请同学们继续思考，这六个一次函数的解析式又有什么不同呢？

$$y = 300t \quad Z = 1318 - 300t \quad l = 2\pi r \quad m = 7.9V \quad T = -2t \quad Z = 1318 - y$$

生：他们等号右边有的是单项式有的是多项式。将 $Z = 1318 - 300t$ 和 $Z = 1318 - y$ 分为一类，其他的分为另一类。

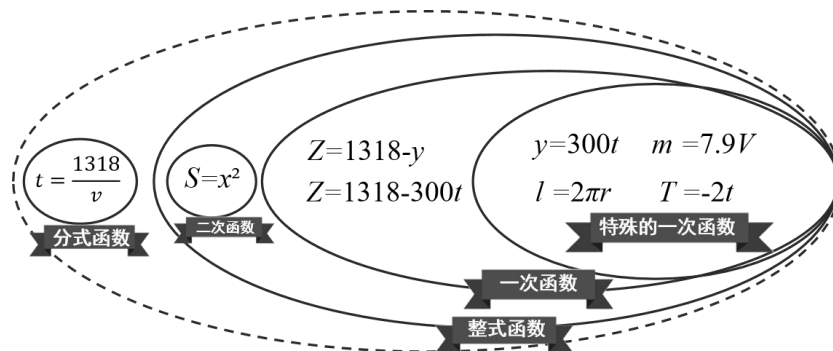


图 C-5

师：那么这四个解析式在形式上就更加特殊，他们是特殊的一次函数，特例研究是我们数学研究的一般方法，这节课我们就从这些特殊的一次函数开始研究。

4.对比联系、抽象归纳

$$y = 300t \quad m = 7.9V \quad l = 2\pi r \quad T = -2t$$

师：那同学们想想，这类函数解析式有什么共同特征呢？

生：我认为这四个函数都很像，并且等号左边都是表示函数的字母，等号右边都是表示自变量的字母与常量乘积的形式。

师：观察的真仔细，那他们的一般形式就可以写为……？

生：函数=常量×自变量

师：通常我们用 x 和 y 表示自变量和函数值，如果我们用 k 表示常量，解析式就可以写为……？

生： $y = kx$ 。

师：很好，我们接着看 $y = 300t$ 用乘除互逆运算， $\frac{\text{路程}}{\text{时间}} = 300$ ，也就是它的速度。

类似的第二个式子…… $\frac{\text{周长}}{\text{半径}} = 2\pi$ ，第三个…… $\frac{\text{质量}}{\text{体积}} = 7.9$ （密度）…… $\frac{\text{物体的温度}}{\text{时间}} = -2$ ，

同学们观察一下这些式子你有什么发现？

生：我发现它们的比值都是定值。

师：那有没有让你联想到什么知识？回想一下小学学习的……？

生：正比例关系。

师：两个量的比值一定，他们之间的关系是正比例关系。那现在你能试着给这类函数起一个名字吗？

生：正比例函数。

师：非常好，这就是我们这节课重点研究的正比例函数。其中这里的比值，也就是 k ，我们把它叫做比例系数。观察一下 k 可以取哪些数？

生 1: 正数、负数。

生 2: 任意实数。

生 3: 不为 0 的任意实数。因为当 k 为 0 的话自变量就消失了。

师: 非常好, 所以这里我们规定 k 不等于 0。下面我们试着给正比例函数下定义。一般地, 形如..... $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的函数叫做正比例函数, 其中 k 叫做比例系数。

5. 分层练习

师: 你能举出生活中的正比例函数的例子吗? 一位同学说背景, 另一位同学来判断。

生 1: 一支笔 2 元钱, 买笔需要用的钱 y 与买笔的数量 x 之间的关系。

生 2: 是正比例函数, $y = 2x$ 。

生 3: 一天读 10 页书, 读的总页数 m 与天数 n 间的函数关系。

生 4: 是正比例函数, $m = 10n$ 。

生 5: 出租车的车费 y 元与行驶的距离 x 千米。

生 6: 我认为不是正比例函数, 因为出租车有起步价。我们市的起步价是 7 元 2 公里, 我们坐一公里是 7 元, 坐 2 公里还是 7 元。

师: 请同学们了解一下我们市出租车的收费标准, 通过本章我们后面的知识, 试着用函数的知识分析一下出租车收费问题。

师: 刚刚买笔的问题中, $y = 2x$, 已知买笔的数量求钱数, 买一支笔需要.....2 元, 买 2 支笔需要.....4 元, 买 3 支笔需要.....6 元。我们把 $y = 2x$ 的函数从实际问题中抽离出来, 给出 y 的值你能求出 x 的值吗? 当 $y = -6$ 时, $x = \dots\dots?$

生: $x = -3$ 。因为 $y = -6$, $2x = -6$, 所以 $x = -3$ 。

表 C-1

x	...				1	2	3	...
y	...	-6	-4	-2	0			...

师: 非常好, 请同学们根据解析式分别求出对应 x 和 y 的值, 并填入表格。观察上表和解析式, 你能发现 y 随 x 的变化过程中的变化规律吗?

生 1: 我发现 x 增大, y 也在增大。

生 2: x 每增加 1, y 增加 2。

师: 非常好, 这些都是我们从数的角度得到的函数 $y = 2x$ 的变化规律, 有了解析式、表格, 我们还可以怎样表示函数呢?

生: 图像。

师: 请同学们试着用描点法画出函数图像。我们来看一下第一位同学画的图像, 有

需要补充的吗?

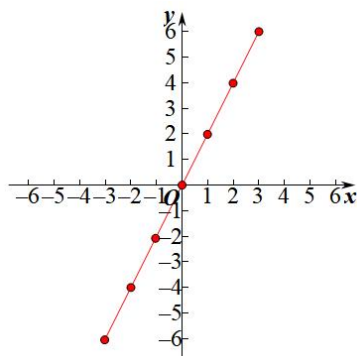


图 C-6

生：它的两边没出头，两边还有无数个点。

师：观察第二位同学画的又有什么发现？

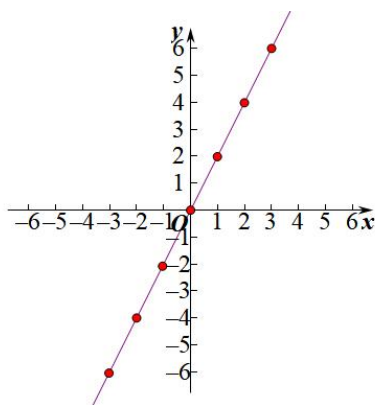


图 C-7

生 1：它应该是条直线。

生 2：它应该经过原点。

生 3：它应该经过一三象限。

师：经过一三象限，我们一起用手画一下，从左往右是一个上升的趋势。这是我们从形的角度，通过观察图像特征我们也可以得到它的一些变化规律。这些变化规律其实就是 $y = 2x$ 的一些性质。下节课我们将进一步利用函数图像，数形结合地研究它的性质。我们知道比例系数 k 决定了正比例函数的解析式，相应地当 k 取不同值时，函数图像也不相同。当然，通过观察不同正比例函数的图像，我们又可以发现不同函数图像间的共性，从而抽象出函数的性质。大家课后尝试用描点法画一些正比例函数的图像，观察函数的图像有什么特点，我们可以得到正比例函数的哪些特性？下节课我们一起来交流自主探究的收获。

6. 梳理总结

师：这节课我们重点学习了哪一类函数？

生：正比例函数。

师：很好，那我们是怎样想到先研究正比例函数的？

生：因为它最简单最特殊。

师：这是从特殊到一般的研究方法，那我们是怎样研究正比例函数的？我们是先探究了它的定义。那我们是如何一步一步得到它的定义的？

生：我们先从实际问题中得出了一些函数的解析式。

师：根据实际问题建立数学模型，然后再对数学模型进行求解，再用得到的结果解决实际问题，这是数学建模，而我们从实际问题中找到数量关系并列函数解析式就是建立数学模型的过程。

生：再把它们分类，再找出它们比较特殊的一部分并研究它们的共同点。

师：观察它们的共同特征，最后再抽象归纳得到正比例函数的定义。接下来我们还将学习函数的哪些知识呢？

生：函数的图像和性质。

师：研究函数的图像与性质我们可以用数形结合的方法。

师：按照我们从特殊到一般的研究思路，我们研究完正比例函数还将研究哪类函数呢？

生：一次函数。

师：按照怎样的路径去学习呢？

生：从实际问题中列出一函数的解析式，再从定义、图象、性质三方面来研究，最后用函数知识来解决实际问题。

函数研究的一般路径：

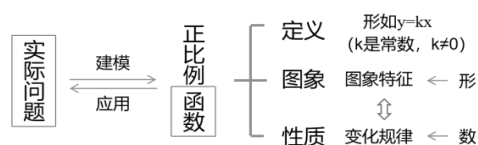


图 C-8

师：非常好，其实对于我们初中阶段将要学习的一次函数、二次函数、反比例函数，我们都将用相同的路径和方法去研究，这实际上是函数研究的一般路径。

7. 分层作业

必做题：课本 98 页 第 1 题。

选做题：在日常生活中，寻找正比例函数的实例，试着提出问题，画出函数图象（小组合作探究）。

附录D 《算术平方根》的教学案例

一、教学目标

- 1.通过实际问题抽象出算术平方根的概念，了解平方与开平方互为逆运算，会用符号表示数的算术平方根。
- 2.通过互动游戏，巩固算术平方根的概念，并归纳出算术平方根的性质。
- 3.借助数轴和 Excel 表格探究 $\sqrt{2}$ 的大小，了解 $\sqrt{2}$ 是无限不循环小数。

二、教学重点

了解算术平方根的概念和性质。

三、教学难点

会估算 $\sqrt{2}$ 的大小。

四、教学过程（课堂实录）

（课前准备活动：在上课铃声响之前，播放一个时长为两分钟的视频，介绍中国古代益智玩具——七巧板。视频较为详细地介绍了七巧板的构成、趣味性及其实用价值。学生两人一组，每组发放一个七巧板。）

环节 1：七巧板拼图，激趣设疑。

师：七巧板是一款有趣的益智玩具，我们用七块板可以拼出各种各样的图形。七巧板有一种玩法叫“见影排形”，根据所给图形的影子，用如右图所示的一副七巧板进行排列拼出所给的图形。例如下面就是老师根据箭头和天鹅的影子，用七块儿板拼成的。

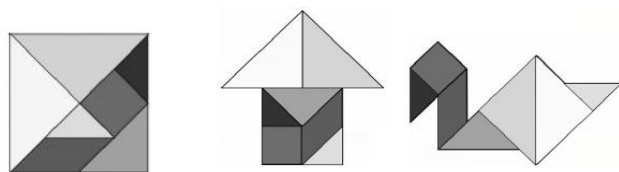


图 D-1

下面这里有一副天天向上的图案，你可以用手中的七巧板拼好吗？小组合作动手试试看。



图 D-2

(教师观察,请拼得最快的小组在黑板上用带有吸铁石的七巧板教具展示本小组的拼图方法。)

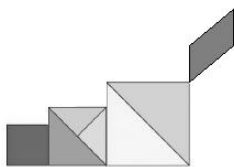


图 D-3

师:我们发现出现了三个面积不同的正方形,假设最小正方形的面积是 1,求另外两个正方形的面积。小组讨论后,请代表上台展示。

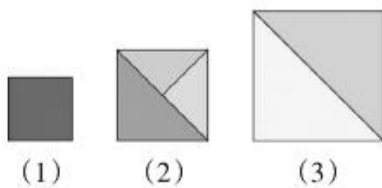


图 D-4

生:我们已知最小正方形面积是 1,把中号正方形中的两个小三角形重新拼成一个正方形,刚好和最小正方形面积相同,而中号正方形面积刚好是这两个小三角形面积之和的两倍,所以中号正方形的面积是 2,将中号正方形的三块板重新拼成一个大三角形,发现大三角形和大正方形面积的一半相等,所以大正方形的面积是 4。

师:这位同学解释得非常好。下面请同学们分别求出图中三个正方形的边长。填入下表。

表 D-1

正方形的面积	1	2	4
正方形的边长	1		2

师:大家在求第二个正方形的边长时遇到了困难,这就需要用到我们今天学习的知识——算术平方根。

环节 2:分析问题,抽象出概念。

师:我们再来看这些正方形的边长怎么求,填入下表。

表 D-2

正方形的面积	1	2	4	$\frac{4}{25}$	0.36	5	...	a
正方形的边长	1		2					x

师:面积是 $\frac{4}{25}$,边长是多少?

生： $\frac{2}{5}$ 。

师：面积是 0.36，边长是多少？

生：0.6。

师：面积是 5，边长是多少？

生：不知道怎么求。

师：看来大家和刚才求面积是 2 的正方形一样，也是一下子找不到边长是多少。边长和面积还可以取很多值，我们把这个问题一般化，记正方形的面积为 a ，边长为 x ，请同学们考虑 a 和 x 之间要满足什么关系？

生： $x^2 = a$

师：那如果已知 x 要求 a ，这是我们以前学过的什么运算？

生：乘方运算。

师：也就是说已知边长，求面积，是我们学过的乘方运算，那反过来已知面积要求边长，我们以前学过这类运算吗？

生：没有。

师：它跟平方运算刚好是……相反的。在数学里面叫……逆运算。我们把这种运算叫作开平方运算，乘方运算中 x 叫作……底数，2 是指数， a 叫作……幂。对于 $x^2 = a$ ，将具体问题一般化，当指数为 2 时，平方运算是已知底数 x 求幂 a ，开平方运算是已知幂 a 求底数 x 。在开平方运算中，正数 x 叫做 a 的算术平方根， a 叫做被开方数。

师：因为 $2^2 = 4$ ，所以 2 是 4 的……算术平方根；因为 $3^2 = 9$ ，所以 3 是 9 的算术平方根。

师：2 的算术平方根，3 的算术平方根，5 的算术平方根，10 的算术平方根，大家都求不出来，那这个时候我们要想个什么办法？同学们用数学的思维考虑一下……

生：我觉得可以引入一种新的符号来表示。

师：很多数学家都做过这样的事情，用各种符号来表示类似 2，3 这样的数的算术平方根，最后大数学家笛卡尔的表示方法沿用至今， $\sqrt{\quad}$ 读作根号。要表示 2 的算术平方根用 $\sqrt{2}$ ，表示 3 的算术平方根用 $\sqrt{3}$ ，4 的算术平方根也能表示成 $\sqrt{4}$ ， $\sqrt{4}$ 和 2 都是 4 的算术平方根，它们相等。

师：结合我们刚才的分析，什么是算术平方根呢？

生：当一个数的平方是另一个数时，我们把前一个数叫作后一个数的算术平方根。

师：非常好，但这不太符合我们概念的简洁性，谁来改进一下？

生：我觉得可以把这两个数分别用字母代替。我们可以说，当一个数 x 的平方等于 a 时，数 x 叫 a 的算术平方根。

师：还有没有补充的？

生：我觉得 x 和 a 一定是一个正数，因为刚刚说的乘方相当于正方形的面积，无论是面积还是边长都应该是正的。

师：我们再把问题一般化，得到算术平方根的符号表示，即 a 的算术平方根表示为 \sqrt{a} 。这里 a 和 \sqrt{a} 都是大于等于 0 的。

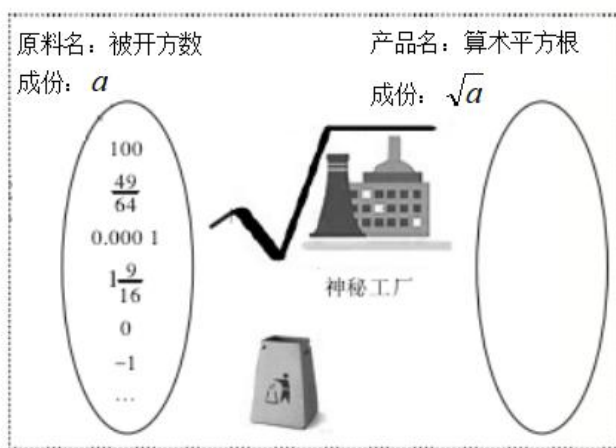


图 D-5

环节 3：辨析释疑，巩固概念。

师：根号很像汉字中的什么字？

生：厂。

师：我们这里刚好有一个神秘的工厂，它的作用是求算术平方根，我们把一些原料加进去，把 100 加进去，生产出来什么？

生：10。

师：你们是怎么算出来 10 的？

生： $10^2=100$ ，所以 10 是 100 的算术平方根。

师：我们用符号表示就是 $\sqrt{100}=10$

.....

师：把 0 放进去，得到什么结果？

生：0。

师：很好，0 的算术平方根是 0，那我们把 -1 放进去，得到什么结果？

(-1 进入了垃圾箱，没有得到结果)

师：怎么会这样？工厂为什么不加工 -1 这个原材料？

生：因为 a 的算术平方根一定是个非负数，大于等于 0 的，一个大于等于 0 的数的平方也一定是大于等于 0 的，因为 -1 是个负数，不大于等于 0，所以 -1 不符合定义上的概念。

师：很好，这位同学当认知中产生冲突时，回到定义中来，因为被开方数是一个数的平方，所以原材料是非负数。

（让学生先入为主，形成被开方数与算术平方根是“一对一”的潜意识，减少学生犯类似 $=\pm 2$ 错误的概率）

师：下面请大家将原材料中的数从小到大排个序。

生： $0 < 0.0001 < \frac{49}{64} < 1 < \frac{9}{16} < 100$

师：非常好，我们再将产品中的数排个序。

生： $0 < 0.01 < \frac{7}{8} < \frac{5}{4} < 10$

师：我们发现下面的刚好对应的是上面的……算术平方根。那你从这些不等式中发现了什么结论？

生：我发现被开方数越大，对应的算术平方根也越大。

环节 4：探究 $\sqrt{2}$ 的大小。

师：我们从七巧板中可以很直观地看到 $\sqrt{2}$ 在 1 到 2 之间。那在平时生活中，我们想知道一个物体的长度，我们通常用什么方法？

生：用尺子量。

师：我们现在没有尺子，但在数学中有个图形有尺子的功能。

生：数轴。

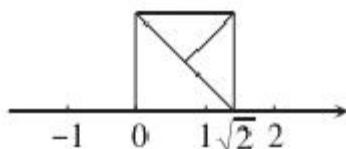


图 D-6

师：那我们就用数轴探究 $\sqrt{2}$ 的大小。看老师画的数轴，单位长度是最小正方形的边长，现在把中号正方形的一个端点放在圆点处，另一个端点对应的数字就是…… $\sqrt{2}$ 。

（小组讨论，用不等式逼近的方法估算，培养学生的估算意识）

师：根据数轴，我们可以大致得出在 1 和 2 之间，那我们有没有办法得到更精确的值呢？小组讨论，派代表展示成果。

……

师：哪个小组有方法了？

生：可以一个数位一个数位去试，因为我们知道是接近 1.5 的，就将十分位从 5 往下试，先算 $1.5^2=2.25$ ，再算 $1.4^2=1.96$ ，所以十分位应该是 4。

师：为什么是 4？谁来补充一下？

生：因为 $1.5^2=2.25$ ， $1.96 < 2 < 2.25$ ，所以 $\sqrt{1.96} < \sqrt{2} < \sqrt{2.25}$ ，即 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

师：刚好用到刚才得到的结论……被开方数越大，算术平方根就越大。

师：此时，我们已经把 $\sqrt{2}$ 的大小锁定在 1.4 至 1.5 之间，那么我们怎么样让估计结果更准确呢？

生：十分位确定为 4，我们可以将百分位从 1 开始试，直到找到一个数的平方小于 2，和它相邻的数的平方大于 2，就能说明 $\sqrt{2}$ 在这两个数之间。

师：非常好，那我们就继续估计 $\sqrt{2}$ 更精确的大小吧。

（借助 Excel 表格的计算功能，实现更加精准的估计，培养学生利用信息技术手段处理数据的意识）

	A	B
1	算术平方根 \sqrt{a}	被开方数 a
2	1	1
3	1.41	1.9881
4	1.42	2.0164
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		

图 D-7

师：但是计算起来又太麻烦了，利用 Excel 我们输入算术平方根 \sqrt{a} ，就可以求出被开方数 a 的值。我们从多少开始算吧？

生：1.41。

（得出被开方数 a 为 1.9881）

师：还没到 2，继续试。

生：1.42。

（得出被开方数 a 为 2.0164）

生：超过了，不用再往下算了。

师：因为…… $1.9881 < 2 < 2.0164$ ，所以…… $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$

师：因此，我们可以确定 $\sqrt{2}$ 的百分位是……1。我们可以继续算下去。

……

师：还有吗？

生：我们还用了不等式逼近的方法来估计 $\sqrt{2}$ 的大小。

师：非常好，证明 $\sqrt{2}$ 的大小，我们用了不等式逼近的方法，证明 $\sqrt{2}$ 的存在性我们使用了数形结合的方法。

……

环节 6：播放数学小故事音频。

（教师播放“ $\sqrt{2}$ 与第一次数学危机”的音频，学生听后谈谈听数学小故事的感受。）

师：听完了这个故事，大家有什么想法？

生 1：我们要勇敢地发问，对于数学，我们要不断地提问，这样才可能使无论数学上还是生活上都得到进步。

生 2：我们应该在生活或实验中，不断实践提出的问题，去解答它。

师：也就是说，我们要善于发现问题，分析问题，解决问题。非常好。

生 3：光是数字一方面的研究是刻板的，光是几何一方面的研究是单薄的，如果将数字和几何结合在一起会有更多的发现。

生 4：任何问题不能只靠直觉去发现，还要去推理和验证。

……

环节 7：布置作业。

巩固性作业：完成教材习题 6.1 中的第 1，2 题。

研究性作业：你想了解更多 $\sqrt{2}$ 与第一次数学危机的知识吗？请查阅相关资料，以第一人称写一篇“我是 $\sqrt{2}$ ”的小论文。

致 谢

行文至此，落笔为终。八年的石大求学之路即将落幕，从本科到研究生，始于 2014 年秋，终于 2022 年夏，蓦然回首，让人感慨万千，以前总认为来日方长，殊不知八年时光已一去不复返，纵使心中有万般不舍，但仍心怀感激，我将牢记“明德正行，博学多能”的校训，不忘初心，砥砺前行。

何其有幸，生于华夏。我们长在红旗下，生在春风里，不经战乱，不缺衣食，不被全球肆虐的疫情困扰。感谢党和国家给予我安静、舒适的学习环境，有幸在党百年华诞之际成为党的一员，我将身怀赤诚之心，以报国家学校的栽培之恩。

桃李芬芳，教泽绵长。首先感谢我的导师谢红梅教授，谢老师对我们要求严格，历经多稿，逐字逐句、不厌其烦地悉心指导我的论文写作，甚至有时批注的日期已至深夜，您严谨的治学态度，渊博的知识，一丝不苟的工作作风让我钦佩不已，将成为我努力追寻和学习的目标。另外，还要感谢曹香兰老师、郭瑞老师、张梦琇老师对我思想上的引领，在她们的培养下我成为了一名光荣的共产党员。此外，还要感谢八年来所有老师的帮助和支持，是您们的谆谆教诲，让我走到了今天。

春晖寸草，山高海深。感谢父母含辛茹苦地将我养育成人，无微不至的关心照顾，您们无私的奉献和对我学业上的支持是我奋斗至今的不竭动力，感谢哥哥嫂子对我的帮助与支持，对家的倾情付出，悉心照顾父母，让我免去后顾之忧，安心完成学业。

山水一程，三生有幸。感谢八年学习生涯中的同窗好友，我们互相帮助，共同成长，结下了深厚的友谊，愿我们前程似锦，归来仍是少年。感谢三年实习期间朋友及同事的帮助与支持，是你们让我度过了难忘终生且收获颇丰的实习生涯。

初见乍欢，久处仍怦然。感谢女友小石头的信任与陪伴，随我从遥远边疆来到了我的家乡，在生活和学习上给了我无限的鼓励和支持，感谢你的出现，让我找到生活中最温柔的光，愿我们未来平安顺遂，携手共度余生。

最后，再次感谢这一路上的所有相遇，愿山河无恙，愿母校常青，愿恩师如意，愿亲友安康，愿青春不散，愿初心不改。石河子大学，我们，再会！

作者简介

郭志宏，男，生于1995年4月，籍贯山西省介休市。2018年毕业于石河子大学师范学院数学与应用数学专业，获理学学士学位。2018年9月起在石河子大学理学院数学系攻读教育硕士专业学位。

