

分类号：
学号：20222118007

密级：公开
单位代码：10759

石河子大学

硕士学位论文



基于解题反思培养初中生推理能力策略研究

学位申请人

任珍瑶

指导教师

谢红梅

申请学位类别

专业硕士

专业名称

教育

研究领域

学科教学（数学）

所在学院

理学院

中国·新疆·石河子

2024年5月

分类号：
学号：20222118007

密级：公开
单位代码：10759

石河子大学

硕士学位论文



基于解题反思培养初中生推理能力策略研究

学位申请人	任珍瑶
指导教师	谢红梅
申请学位类别	专业硕士
专业名称	教育
研究领域	学科教学（数学）
所在学院	理学院

中国·新疆·石河子

2024年5月

**Research on the strategy of developing reasoning ability of junior
middle school students based on problem-solving reflection**

A Dissertation Submitted to
Shihezi University
In Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Education

By

Ren Zhen-yao
(Education)

Dissertation Supervisor :Prof. Xie Hong-mei

May,2024

石河子大学学位论文独创性声明及使用授权声明

学位论文独创性声明

本人所呈交的学位论文是在我导师的指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含其他个人已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中作了明确的说明并表示谢意。

研究生签名：任珍瑶

时间：2024年5月14日

使用授权声明

本人完全了解石河子大学有关保留、使用学位论文的规定，学校有权保留学位论文并向国家主管部门或指定机构送交论文的电子版和纸质版。有权将学位论文在学校图书馆保存并允许被查阅。有权自行或许可他人将学位论文编入有关数据库提供检索服务。有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

研究生签名：任珍瑶

时间：2024年5月14日

导师签名：谢红梅

时间：2024年5月14日

摘要

基于时代发展对人才培养的需要,《义务教育数学课程标准(2022年版)》明确提出核心素养导向的课程目标:会用数学的眼光观察现实世界,会用数学的思维思考现实世界,会用数学的语言表达现实世界。其中推理能力为“数学的思维”的主要表现之一,贯穿数学的产生和发展的全过程,是得到数学结论、构建数学体系的重要方式,是数学学习和生活中不可或缺的基本思维品质。而解题反思是数学教学过程不可缺少的环节,是培养学生数学思维,发展学生推理能力的重要抓手。因此基于解题反思培养初中生的推理能力就成了需要重点关注的问题。

本研究以实习学校八年级学生和教师为研究对象,从推理类型、数学内容和推理水平三个维度构建数学推理能力测评框架,借助测试卷、学生对测试题的反思、问卷、访谈调查初中生的推理能力和解题反思现状。通过对调查结果的分析,结合实习期间的观察,梳理出以下问题:(1)该校学生整体推理水平处于中等水平,但学生推理能力发展存在差异性,只有极少学生能达到反思水平,且学生的演绎推理的发展要优于合情推理,学生对数与代数的数学知识掌握情况要优于图形与几何;(2)学生在解答测试题、进行数学推理时,推理不够严谨,推理思路混乱,会出现问题表征型障碍、知识型障碍、策略型障碍、操作型障碍;(3)学生解题反思流于形式和表面,解题反思意识薄弱,解题反思认识片面,解题反思内容针对性不强;(4)教师对解题反思和数学推理认识的深度不够,较少开展解题反思教学活动,教学中不重视推理过程的讲解。

本研究聚焦调查结果,从教师层面提出解题反思视角下培养初中生数学推理能力的策略:促进教师专业化,更新解题反思理念,加强推理认知;重视课堂导向性,创设解题反思氛围,关注推理过程;强化课堂例题价值,示范解题反思方法,引发推理思路;注重教学针对性,培养解题反思习惯,引领推理发展;深化课堂内外交流,提高解题反思认识,搭建推理桥梁,以期为一线教师在数学解题反思教学中落实学生推理能力的发展提供一些教学参考与建议。

关键词: 解题反思;初中生;推理能力

Abstract

Based on the needs of talent training for the development of The Times, "Compulsory Education Mathematics Curriculum Standards (2022 edition)" clearly puts forward the core literacy-oriented curriculum goals: can observe the real world with mathematical vision, can think about the real world with mathematical thinking, and can express the real world with mathematical language. Among them, reasoning ability is one of the main manifestations of "mathematical thinking", which runs through the whole process of the generation and development of mathematics, is an important way to get mathematical conclusions and build mathematical system, and is an indispensable basic thinking quality in mathematics learning and life. The reflection of solving problem is an indispensable link in the process of mathematics teaching, and it is an important grip to train students' mathematical thinking and develop students' reasoning ability. Therefore, training the reasoning ability of junior high school students based on problem-solving reflection has become a problem that needs to be focused on.

Focusing on the survey results, this study puts forward strategies to train junior middle school students' mathematical reasoning ability based on problem-solving reflection from the perspective of teachers: type of reasoning, mathematical content and level of reasoning, and investigates the reasoning ability and problem-solving reflection status of junior middle school students by means of test papers, students' reflection on test questions, questionnaires and interviews. Through the analysis of the survey results and the observation during the internship, the following questions are sorted out: (1) the overall reasoning level of students in this school is in the middle level, but the development of students' reasoning ability is different, only a few students can reach the reflective level, and the development of students' deductive reasoning is better than plausible reasoning, and students' mastery of mathematical knowledge of number and algebra is better than that of graphics and geometry; (2) when students answer test questions and conduct mathematical reasoning, their reasoning is not rigorous enough, their reasoning ideas are confused, and they will have problem representation-type barriers, knowledge-type barriers, strategy-type barriers, and operation-type barriers; (3) students' reflection on problem solving is formal and superficial, the consciousness of problem solving reflection is weak, the understanding of problem solving reflection is one-sided, and the content of problem solving reflection is not well targeted; (4) teachers lack the depth of understanding of problem-solving reflection and mathematical reasoning, seldom carry out problem-solving reflection teaching activities, and pay little attention to the explanation of reasoning process in teaching.

Focusing on the survey results, this study puts forward some strategies to train junior middle school students' mathematical reasoning ability from the perspective of teachers' problem-solving reflection: promote teachers' specialization, update the concept of problem-solving reflection, and strengthen the cognition of reasoning; attach importance to the classroom orientation, create atmospheres of problem-solving reflection, pay attention to the process of reasoning; strengthen the value of classroom examples, demonstrate the method of problem-solving reflection, and trigger reasoning ideas; pay attention to the teaching pertinence, cultivate the habit of problem-solving reflection, lead the development of reasoning; deepen the communication inside and outside the classroom, improve the understanding of problem-solving reflection, and build a reasoning bridge, in order to provide some teaching references and suggestions for front-line teachers to implement the development of students' reasoning ability in the teaching of mathematical problem-solving reflection.

Key words: Problem-solving reflection; Junior high school students; Reasoning ability

目录

摘要.....	I
Abstract	II
第1章 绪论.....	1
1.1 研究背景与研究意义.....	1
1.1.1 研究背景.....	1
1.1.2 研究意义.....	2
1.2 概念界定与理论基础.....	3
1.2.1 解题反思的概念界定.....	3
1.2.2 推理能力的概念界定.....	3
1.2.3 理论基础.....	5
1.3 解题反思国内研究现状.....	6
1.4 推理能力国内研究现状.....	9
1.5 研究现状评述.....	12
1.6 研究目的与研究内容.....	13
1.6.1 研究目的.....	13
1.6.2 研究内容.....	13
1.7 研究思路与方法.....	14
1.7.1 研究的整体思路.....	14
1.7.2 研究方法.....	14
1.8 研究的重难点与创新之处.....	15
第2章 研究设计与实施.....	17
2.1 研究工具设计.....	17
2.1.1 数学推理能力测评框架的设计.....	17
2.1.2 测试卷的编制及说明.....	18
2.1.3 调查问卷的编制及说明.....	20
2.1.4 教师访谈提纲的设计.....	21
2.2 调查实施.....	21
2.2.1 调查对象的选择.....	21

2.2.2 调查的实施与数据收集.....	22
2.3 测试卷质量分析.....	22
2.4 问卷质量分析.....	23
2.5 本章小结.....	24
第3章 初中生解题反思与推理能力现状调查.....	25
3.1 测试卷结果与分析.....	25
3.1.1 测试卷整体分析.....	25
3.1.2 测试卷各维度差异分析.....	28
3.1.3 测试卷性别差异分析.....	31
3.1.4 测试卷作答情况具体分析.....	36
3.2 学生的解题反思情况的分析.....	50
3.3 调查问卷结果与分析.....	52
3.3.1 调查问卷整体分析.....	53
3.3.2 调查问卷各维度具体分析.....	54
3.4 调查问卷、测试成绩、平时数学成绩的相关性分析.....	61
3.5 教师访谈及分析.....	63
3.5.1 教师访谈记录.....	63
3.5.2 教师访谈记录分析.....	65
3.6 本章小结.....	66
第4章 解题反思视角下培养初中生推理能力的策略.....	67
4.1 促进教师专业化, 更新解题反思理念, 加强推理认知.....	67
4.2 重视课堂导向性, 创设解题反思氛围, 关注推理过程.....	68
4.3 强化课堂例题价值, 示范解题反思方法, 引发推理思路.....	72
4.4 注重教学针对性, 培养解题反思习惯, 引领推理发展.....	82
4.5 深化课堂内外交流, 提高解题反思认识, 搭建推理桥梁.....	83
第5章 研究的结论、不足与展望.....	85
5.1 研究结论.....	85
5.2 研究的不足.....	85
5.3 研究展望.....	86
参考文献.....	87
附录 A: 八年级学生推理能力测试卷.....	91
附录 B: 推理能力调查问卷.....	94
附录 C: 教师访谈提纲.....	97

致谢.....	98
个人简介.....	99

第1章 绪论

1.1 研究背景与研究意义

1.1.1 研究背景

(1) 发展推理能力契合新时代需求

国以才立，业以才兴，人才是发展的第一动力。习近平总书记指出：“我国要实现高水平科技自立自强，归根结底要靠高水平创新人才。”时代的发展需要创新型人才，教育是培养创新型人才的基础工程。在基础教育中，数学是培养学生的创新思维、创新能力的摇篮，有着其他学科无法替代的优势。要想在数学教学活动中培养学生的思维能力，教师应在数学课堂中引导学生进行发现问题、分析问题、解决问题。其中数学推理是一个很好的促进学生自主探究发现的途径，能够让学生亲历思考的全过程，积极主动地建构认知结构，有利于培育学生的创新思维和创新能力。

《义务教育数学课程标准（2022年版）》全面落实习近平总书记关于培养担当民族复兴大任时代新人的要求，从有理想、有本领、有担当三个方面，明确提出了数学课程要培养学生的核心素养，即实现“三会”目标：会用数学的眼光观察现实世界，会用数学的思维思考现实世界，会用数学的语言表达现实世界^[1]。其中推理能力为“数学的思维”的主要表现之一。数学推理能使人的思维方式严谨化；能训练心智使之能正确而活泼地思考；能增进人们认识与理解事物的敏锐性和渗透性；能启发人们对新问题进行有效地分解与组合，发展分析问题与解决问题的能力基本功^[2]。

将推理能力的培养落实到数学解题反思教学中，有助于学生克服数学学习障碍，加深对数学知识的理解与认知，构造一个清晰的数学知识网络，把握数学本质，培养知识迁移能力，提高数学洞察力和数学表达能力，发展推理能力和思维品质。因此基于解题反思培养初中生的推理能力就成了需要重点关注的问题。

(2) 发展推理能力需要解题反思

推理能力是得到数学结论、构建数学体系的重要方式，不仅对学生思维的培养发挥着重要的作用，而且对创造力发展也有所帮助。但是通过文献调研，笔者发现许多初中学生推理能力相对较弱，存在推理意识薄弱以及推理的严谨性不足等问题。像数学老师多次强调过或者讲解过的题目，学生再次遇到仍然容易犯相同的错误。其原因

是学生在平常的解题中常常只关注解题结果，忽略解题过程，因而基础知识不扎实，缺乏观察能力，思维不够灵活，推理能力不高，无法构建知识内在逻辑、合理得出数学结论、体会问题中蕴含的数学思想方法^[3]。

解题反思是数学教学过程不可缺少的环节，是培养学生数学思维，发展学生推理能力的重要抓手。解题反思是对解题过程的深层次的思考；是进一步深化、整理和提高的过程；是进一步开发解题的智力价值的过程；也是一种再发现和再创造的过程^[4]。

解题反思不仅可以帮助学生深入理解问题本质，促进知识迁移，强化知识体系，优化解题路径，而且有助于学生养成良好的思维习惯，提高思维能力和思维素养，优化思维品质。而推理能力是指从一些事实和命题出发，依据规则推出其他命题或结论的能力^[1]。因此要发展学生的数学推理能力，必须要重视解题反思。

1.1.2 研究意义

推理能力是数学核心素养的重要表现之一，贯穿数学的产生和发展的全过程，是得到数学结论、构建数学体系的重要方式，是数学学习和生活中不可或缺的基本思维品质。而解题反思是数学教学的重要环节之一，对培养学生推理能力具有重要影响。解题后的反思不仅有利于加深学生对知识与方法的内化，而且对学生思维能力和推理能力的发展也有所帮助。因此，数学解题反思教学在学生推理能力的培养中具有不可撼动的重要地位。

理论意义：有关推理能力的研究不断深耕与推进，研究成果日益丰硕，培养方案也逐步成熟。解题反思是数学教学的重要环节之一，对培养学生推理能力具有重要意义。然而学者们很少针对解题教学尤其是解题反思，开展培养推理能力的教学研究。本研究基于解题反思培养初中生的推理能力，从推理类型、数学内容和推理水平三个维度构建数学推理能力测评框架，借助测试卷、学生解题反思情况、问卷、对教师的访谈了解实习学校学生的推理能力和解题反思的现状，并提出解题反思视角下初中生推理能力培养策略，在一定程度上能够充实解题反思和推理能力研究成果。

实践意义：本研究通过调查，了解实习学校学生解题反思和推理能力现状以及存在的问题，并在此基础上提出解题反思视角下初中生推理能力培养策略，希望教师重视解题反思和推理能力的教学，同时为教师教学实践提供一些教学参考与建议。此外，本研究还聚焦学生的测试题作答和反思过程，启发教师更有针对性地剖析学生问题，有的放矢地进行教学。

1.2 概念界定与理论基础

1.2.1 解题反思的概念界定

徐利治认为解题反思是对新知识、新方法的反思，是对新旧知识的联系进行反思及重新组合的过程，最终形成新的知识体系和方法体系，并成为未来继续学习所需要的原材料^[5]。

张如忠和罗增儒指出解题反思就是对怎样解题和学会解题两个层面的反思。怎样解题层面的反思主要是复查检验，看计算是否准确、推理是否合理、思维是否周密、解法是否有更多、更简单的。学会解题层面的反思表现为解题后对数学题目本身及解题方法的重新认识^[6,7]。

徐莉芳和马文杰认为解题反思是对解题活动过程进行再认识，内容主要包括对题目所涉及的知识点、题意理解、解题方法和规律、解题结果表述的反思^[8]。

赵士元认为解题反思，就是指解题后反思数学问题中所涉及的数学概念、基本知识和基本能力要求，验证结论的合理性，通过对问题归纳类比、抽象概括，对所蕴含的数学方法、数学思想的深入思考以及对数学问题的再认识，达到“两次解题”的目的，从而逐步培养学生独立思考、积极探究的习惯，提升数学学科综合素养^[9]。

张彬和於有海认为解题后的反思是对题目以及自己的解题过程与结果进行反思，其目的是结合题目，对自己解题的思维过程进行批判性的思考与研究^[10]。

谭云峰认为数学解题的反思是让学生通过对题目理解过程、解题过程进行反思，对做错的题目进行改正、反思和总结，从而提升学生的思维的深度，加深对知识的理解，提升批判思维能力，严谨的逻辑思维的品质^[11]。

基于对解题反思相关文献的梳理，本研究对解题反思做如下界定：解题反思是积极主动地自觉分析，从解题过程、知识、思想方法、结论等方面开展多维度的反思总结，从而提升思维的深度和广度。

1.2.2 推理能力的概念界定

推理能力在我国初中数学课程纲要、课程标准及教学大纲的体现由来已久，出现过论理能力、逻辑推理能力、思维能力以及推理论证能力等称谓。虽然至今称谓没有统一，但其内涵总包含合情推理和演绎推理。

《义务教育数学课程标准（2011年版）》对推理能力的内涵主要从合情推理和演绎

推理两个方面进行阐述，特别指出：合情推理是从已有的事实出发，凭借经验和直觉，通过归纳和类比等推断某些结果；演绎推理是从已有的事实（包括定义、公理、定理等）和确定的规则（包括运算的定义、法则、顺序等）出发，按照逻辑推理的法则证明和计算^[12]。

史宁中认为数学的推理是逻辑推理中最重要的内容，并基于数学命题论证了逻辑推理的本质是推理的过程具有传递性，包括关系传递性和性质传递性。在关系传递性的推理中，所论及的满足关系或者运算的研究对象（包括等价物）的范围是不变的；在第一类性质传递性推理中，所论及的满足性质的研究对象（包括等价物）的范围是从大到小的、是具有包含关系的。具有关系传递性或者具有第一类性质传递性的推理为演绎推理，也就是从一般到特殊的推理，通过这样推理得到的结论是必然正确的。第二类性质传递性推理所论及的满足性质的研究对象（包括等价物）的范围是从小到大的、是具有被包含关系的；在思维形式上，是通过经验过的东西推断未曾经验的东西，也就是从特殊到一般的推理，分为归纳和类比两种情况。具有第二类性质传递性的推理为归纳推理，通过这样推理得到的结果是或然正确的^[13]。

程靖、孙婷和鲍建生认为数学推理论证能力是通过对数学对象（数学概念、关系、性质、规则、命题等）进行逻辑性思考（观察、实验、归纳、类比、演绎），从而做出推论；再进一步寻求证据、给出证明或举出反例说明所给出推论的合理性的一项综合能力^[14]。

黄敏把数学推理能力理解为是一种数学思维能力，是逻辑论证能力、计算能力、空间想象能力、分析和解决问题的能力等的综合体现^[15]。

2019年世界组织 OECD（经济合作与发展组织）发布的 PISA2021 数学素养测评框架指出，数学推理包含 6 大核心要素：（1）理解数字系统和它们的代数性质；（2）领会抽象和符号表征的力量；（3）理解数学结构及其规律；（4）识别数量之间的函数关系；（5）使用数学模型理解现实世界；（6）理解变化是统计学的核心^[16]。

唐举和黄智华认为数学推理能力，就是在数学活动中，通过想象、类比、归纳等方法寻求思路、提出猜想等，并对其进行严谨逻辑证明的心理特征^[17]。

《义务教育数学课程标准（2022年版）》对推理能力的内涵界定如下：推理能力主要是指从一些事实和命题出发，依据规则推出其他命题或结论的能力。理解逻辑推理在形成数学概念、法则、定理和解决问题中的重要性，初步掌握推理的基本形式和规则；对于一些简单问题，能通过特殊结果推断一般结论；理解命题的结构与联系，探索并表述论证过程；感悟数学的严谨性，初步形成逻辑表达与交流的习惯^[1]。

鲍建生和章建跃阐述了推理能力在初中阶段的行为特征：理解推理在数学中的意

义与作用；能够运用基本的推理形式和逻辑规则，进行数学推理和证明^[18]。

基于对推理相关文献的梳理，本研究依据《义务教育数学课程标准（2022年版）》，对推理能力做如下界定：推理能力是指从一些事实和命题出发，依据规则推出其他命题或结论的能力。推理能力的内涵主要包含合情推理和演绎推理。合情推理是从已有的事实出发，凭借经验和直觉，通过归纳和类比等推断某些结果；演绎推理是从已有的事实（包括定义、公理、定理等）和确定的规则（包括运算的定义、法则、顺序等）出发，按照逻辑推理的法则证明和计算。

1.2.3 理论基础

（1）元认知理论

美国心理学家弗拉维尔于20世纪70年代提出了元认知这个概念，他将元认知定义为一个人所具有的关于自己思维活动和学习活动的知识以及对该过程的控制，是何调节认知过程的认知活动。元认知结构主要包括元认知知识、元认知体验和元认知监控。其中，元认知知识是指个体关于自己的认知活动、认知能力、任务目标、任务策略等方面的知识。元认知体验是人们从事认知活动时产生的认知和情感体验，它可能被个体清晰地或潜意识地感受到。它持续的时间可长可短，可以发生在活动之前，也可以发生在活动之中、之后等。元认知监控是指认知主体在认知过程中，将自己正在进行的认知活动作为意识目标，不断对其进行自觉的计划、检查、控制和调节^[19]。

元认知理论对促进学生解题反思，提升学生的数学推理能力有十分重要的指导和借鉴意义。学生能够借助元认知进行自我调控，对解题结果进行批判和检验，同时对解题的思路、方法和效果进行评判，从而获得更真实准确的解题认知，便于学生在解题反思中进行自我监视、控制和调节。在数学推理的过程中，个体要根据自己的认知结构，独立地表征问题、选择策略，同时又要调控自己的思维，建构新的图式，形成新概念，发现新原理，获得解决后续问题的认知策略。在解题反思的过程中，学生的元认知水平能够得以提升，反过来再以元认知驱动学生逻辑推理。因此元认知是解题反思和数学推理过程中重要的驱动力，提高学生的元认知水平能够提升学生的解题反思能力和推理能力，学生的解题反思能力和推理能力的提高又可以促进元认知水平的提高。元认知水平、解题反思能力、推理能力三者互为促进，共同发展。

（2）建构主义理论

建构主义强调学习者对现实世界的独特意义建构，认为学习是学习者主动建构内部心理表征的过程。美国教育心理学家维特罗克认为“人脑并不是被动地学习和记录

信息，而是主动地建构对信息的解释，并从中做出推论。”建构主义还认为，知识并不是外部输入的，也不是由语言来表征的，它只是一种解释和假设，而这种解释和假设是学习者在新旧知识间反复的、双向作用的结果，原有的知识经验也会因为新意义的建构而不断调整 and 改变^[20]。

建构主义理论能为解题反思视角下初中生推理能力的研究提供坚实的理论基础。解题反思是学习者在已有的知识结构上主动进行的建构过程。解题反思可以促使学习者巩固和理解已学过的知识，建立新图式，形成新概念，发现新原理，获得解决后续问题的认知策略。数学推理是一个积极主动的建构过程，学习者主动地根据先前认知结构，注意和有选择地知觉外在信息，选择不同的命题去推证当前命题，从而产生不同的迁移效果。解题反思和数学推理都是高水平思维过程，高水平思维的学习有利于知识的建构，且认知结构能够在解题反思和数学推理活动中得以优化和完善。

1.3 解题反思国内研究现状

(1) 数学解题反思的作用与价值

罗增儒教授认为解题反思是通过已知学未知，通过分析“怎样解题”而领悟“怎样学会解题”的一个过程，可以帮助学生通过有限道题的学习去领悟解无限道题的数学机智^[21]。

方家柞认为解题反思可以培养学生良好的思维品质，有利于巩固和扩充数学知识，能够引导学生进行探究性学习^[22]。

徐莉芳和马文杰指出解题反思有利于优化解题者的知识结构，形成清晰的结构网络；明确解题错误原因，提高错误辨析能力；理解题型特点和解题方法，提升应变能力；熟练掌握解题方法，提升解题能力；培养思维品质（包含思维的深刻性、灵活性、独创性、批判性、敏捷性、系统性等）^[8]。

魏元珊指出学生在解决几何型综合题时会出现自我调控型障碍、问题表征型障碍、知识型障碍、策略型障碍、操作型障碍和回顾与反思型障碍。其中针对回顾与反思型障碍的教学策略，可以帮助学生突破综合题解题难点，提高学生解决问题和综合应用知识的能力^[23]。

大多数研究者都认为解题反思有利于优化学生知识结构，培养学生各方面的能力。且很多文章在阐述解题反思的作用或价值时，倾向于分析其某一方面的作用与价值。

(2) 数学解题反思能力形成的影响因素

刘晶晶发现高一学生的数学解题反思能力处于中等水平，且女生比男生更显薄弱，